1.2 古典概率计算

1.2.1 排列组合的几个简单公式

按公式(1.1),古典概率计算归结为计算两个数 M 和 N.这种计算大多涉及排列组合.二者的区别在于,排列要计较次序而组合不计较:ab 和 ba 是不同的排列,但是是相同的组合.

1.n 个相异物件取 r 个($1\leqslant r\leqslant n$)的不同排列总数,为

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{2.1}$$

因为,从 n 个中取出排列中的第 1 个,有 n 种取法.在剩下的 $n-1$ 个中取出一个,作为排列中的第 2 个,有 $n-1$ 种取法…….最后,在剩下的 $n-r+1$ 个中取出一个作为排列中的第 r 个,有 $n-r+1$ 种取法.因此不同的取法数目为 $n, n-1, \cdots, n-r+1$ 这 r 个数之积,从而得出公式(2.1).

例如,从 a,b,c,d 这 4 个文字中取两个作排列,有 $4\times3=12$ 种:

$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$.

特别,若 $n=r$,由(2.1)得

$$P_r^r = r(r-1)\cdots 1 = r! \tag{2.2}$$

$r!$ 读为“r 阶乘”,是前 r 个自然数之积.人们常约定把 $0!$ 作为 1.当 r 不是非负整数时,记号 $r!$ 没有意义.

2.n 个相异物件取 r 个($1\leqslant r\leqslant n$)的不同组合总数,为

$$C_r^n = P_r^n/r! = n!/(r!(n-r)!) \tag{2.3}$$

因为,每一个包含 r 物件的组合,可以产生 $r!$ 个不同的排列.故排列数应为组合数的 $r!$ 倍,由此得出公式(2.3).C_r^n 常称为组合系数.

例如,从 a,b,c,d 这 4 个文字中取 2 个作组合.有 $4!/(2!\ 2!)=6$ 种,即 ab,ac,ad,bc,bd,cd.

在有些书籍中把记号 C_r^n 写为 C_n^r.C_r^n 的一个更通用的记号是 $\binom{n}{r}$.我们今后将用 $\binom{n}{r}$ 取代 C_r^n.当 $r=0$ 时,按 $0!=1$ 之约定,由(2.3)算出 $\binom{n}{0}=1$,这可看作一个约定.对组合系数另一常用的约定是:按公式

$$\binom{n}{r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$$

只要 r 为非负整数,n 不论为任何实数,都有意义.故 n 可不必限制为自然数.例如,按上式,有

$$\binom{-1}{r} = (-1)(-2)\cdots(-r)/r! = (-1)^r$$

3.与二项式展开的关系

组合系数 $\binom{n}{r}$ 又常称为二项式系数,因为它出现在下面熟知的二项式展开的公式中:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \tag{2.4}$$

这个公式的证明很简单:因为,$(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+$

b). 为了产生 $a^i b^{n-i}$ 这一项,在这 n 个 $(a+b)$ 中,要从其中的 i 个取出 a,另 $n-i$ 个取出 b. 从 n 个中取出 i 个的不同取法为 $\binom{n}{i}$,这也就是 $a^i b^{n-i}$ 这一项的系数.

利用关系(2.4)可得出许多有用的组合公式. 例如,在(2.4)中令 $a=b=1$,得

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

令 $a=-1, b=1$,则得

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

另一个有用的公式是

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \tag{2.5}$$

它是由恒等式 $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$ 即

$$\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m+n}{j}x^j=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$$

比较两边的 x^k 项的系数得到的.

4. n 个相异物件分成 k 堆,各堆物件数分别为 $r_1,\cdots,r_k$ 的分法是

$$n!/(r_1!\cdots r_k!) \tag{2.6}$$

此处 $r_1,\cdots,r_k$ 都是非负整数,其和为 n,又这里要计较堆的次序. 就是说,若有 5 个物体 a,b,c,d,e 分成 3 堆,则 $(ac),(d),(be)$ 和 $(be),(ac),(d)$ 是算作两种不同分法.

证明很简单:先从 n 个中取出 r_1 个作为第 1 堆,取法有 $\binom{n}{r_1}$ 种. 在余下的 $n-r_1$ 个中取出 r_2 个作为第 2 堆,取法有 $\binom{n-r_1}{r_2}$ 种,以此类推,得到全部不同的分法为

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k}$$

利用公式(2.3)并注意 $n-r_1-\cdots-r_{k-1}=r_k$,即得(2.6)

(2.6)常称为多项式系数,因为它是$(x_1+\cdots+x_k)^n$ 的展开式中,$x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$ 这一项的系数.

1.2.2 古典概率计算举例

例 2.1 一批产品共 N 个,其中废品有 M 个.现从中随机(或说随意)取出 n 个,问"其中恰好 m 个废品"这个事件 E 的概率是多少?

按 1.2.1 所述,从 N 个产品中取出 n 个,不同的取法有 $\binom{N}{n}$ 种.所谓"随机"或"随意"取,是指这 $\binom{N}{n}$ 种取法有等可能性.这是古典概率定义可以使用的前提.所以,从实际的角度言,问题在于怎样保证抽取的方法能满足等可能性这个要求.以下各例中"随机"一词也都是作这种理解.

使事件 E 发生的取法,或者说"有利"于事件 E 的取法,计算如下:从 M 个废品中取 m 个,取法有 $\binom{M}{m}$ 种.从其余 $N-M$ 个合格品中取 $n-m$ 个,取法有 $\binom{N-M}{n-m}$ 种.故有利于事件 E 的取法,共有 $\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$ 种.按公式(1.1),得事件 E 的概率为

$$P(E)=\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}\Big/\binom{N}{n} \tag{2.7}$$

这里要求 $m\leqslant M$, $n-m\leqslant N-M$,否则概率为 0(因 E 为不可能事件).

例 2.2 n 双相异的鞋共 $2n$ 只,随机地分成 n 堆,每堆 2 只.问"各堆都自成一双鞋"这个事件 E 的概率是多少?

把 $2n$ 只鞋分成 n 堆每堆 2 只的分法,按公式(2.6),有 $N=$

$(2n)!\ /2^n$ 种.有利于事件 E 的分法可计算如下:把每双鞋各自绑在一起看成一个物体,然后把这相异的 n 个物体分成 n 堆,每堆 1 件.按公式(2.6),分法有 $M=n!$ 种.于是

$$P(E)=M/N=n!2^n/(2n)!=1/(2n-1)!!$$

$a!!$ 这个记号对奇自然数定义:$a!!=1\cdot3\cdot5\cdots a$,即所有不超过 a 的奇数之积.

另一种算法如下:把这 $2n$ 只鞋自左至右排成一列(排法有 $(2n)!$ 种),然后,把处在 1,2 位置的作为一堆,3,4 位置的作为一堆,等等.为计算使事件 E 发生的排列法,注意第 1 位置可以是这 $2n$ 只鞋中的任一只,其取法有 $2n$ 种.第 1 位置取定后,第 2 位置只有一种取法,即必须取与第 1 位置的鞋配成一双的那一只.依此类推,知奇数位置依次有 $2n, 2n-2, 2n-4, \cdots, 2$ 种取法,而偶数位置则都只有 1 种取法.所以,有利于事件 E 的排列总数为 $2n(2n-2)\cdots2=2^n n!$,而

$$P(E)=2^n n!/(2n)!$$

与前面用另外的方法算出的相同.

例 2.3 n 个男孩,m 个女孩($m\leqslant n+1$)随机地排成一列.问"任意两个女孩都不相邻"这个事件 E 的概率是什么?

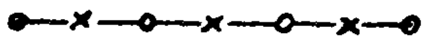

图 1.2

把 $n+m$ 个孩子随意排列,总共有 $N=(n+m)!$ 种不同的排法.有利于事件 E 发生的排法可计算如下:先把 n 个男孩子随意排成一列,总共有 $n!$ 种方法.排定以后,每两个相邻男孩之间有一位置,共有 $n-1$ 个;加上头尾两个位置,共 $n+1$ 个位置(图 1.2 画出了 $n=3$ 的情况,"×"表示男孩,4 个"○"表示刚才所指出的 $n+1=4$ 个位置).为了使两个女孩都不相邻,必须从这 $n+1$ 个位置中取出 m 个放女孩,取法有 $\binom{n+1}{m}$ 种.取定位置后,m 个女孩子尚可在这 m 个取定位置上随意排列,方法有 $m!$ 种.由此推出,

有利于事件 E 发生的排列数为 $M = n!\binom{n+1}{m}m!$，因此，

$$P(E) = n!\binom{n+1}{m}m!/(n+m)! = \binom{n+1}{m}\Big/\binom{n+m}{m}$$

如果这 $n+m$ 个孩子不是排成一直线而是排在一圆圈上，则同一事件 E 的概率是多少？初一看以为无所区别，其实不然. 看图 1.2，若以"×"和"○"分别表男、女孩，则在一直线上首尾两女孩并不相邻. 但若把这直线弯成一个圆圈，则首尾两女孩成为相邻了，因此算法略有不同. 我们留给读者去证明：答案为 $\binom{n}{m}\Big/\binom{n+m-1}{m}$.

例 2.4 一个人在口袋里放 2 盒火柴，每盒 n 支. 每次抽烟时从口袋中随机拿出一盒(即每次每盒有同等机会被拿出)并用掉一支. 到某次他迟早会发现：取出的那一盒已空了. 问："这时另一盒中恰好有 m 支火柴"的概率是多少？

解法 1 我们来考察最初 $2n+1-m$ 次抽用的情况，每次抽用时有 2 种方法(抽出甲盒或乙盒). 故总的不同抽法，有 2^{2n+1-m} 种. 有利于所述事件的抽法可计算如下：先看"最后一次(即第 $2n+1-m$ 次)是抽出甲盒"的情况. 为使所述事件发生，在前 $2n-m$ 次中，必须有 n 次抽用甲盒，实现这一点不同的抽法为 $\binom{2n-m}{n}$. 类似地，"最后一次是抽出乙盒"的抽法也有这么多，故有利于所述事件的全部抽法为 $2\binom{2n-m}{n}$，而事件的概率为

$$2\binom{2n-m}{n}\Big/2^{2n+1-m} = \binom{2n-m}{n}\Big/2^{2n-m} \qquad (2.8)$$

解法 2 因每盒中只有 n 支，最晚到第 $2n+1$ 次抽取时，或在此之前，必发现抽出的盒子已空. 故我们不管结果如何，总把试验做到抽完第 $2n+1$ 次为止，不同的抽法有 2^{2n+1} 种.

现在计算有利于所述事件的抽法. 仍如前，先考虑"先发现甲

盒为空”的抽法有多少.这必然是对某个 $r, r=0,1,\cdots,n-m$,以下情况同时出现:

1° 第 $n+r$ 次抽取时抽出甲盒,而这时甲盒已是第 n 次被抽出;

2° 前 $n+r-1$ 次抽取时,乙盒被抽出 r 次(这不同的抽法有 $\binom{n+r-1}{r}$ 种);

3° 紧接着的 $n-m-r$ 次全是抽出乙盒;

4° 第 $2n-m+1$ 次抽取时抽出甲盒(这时发现它已空,且乙盒恰有 m 支);

5° 最后 m 次抽取结果可以任意(这不同的抽法有 2^m 种).

综合上述,对固定的 r,抽法有 $\binom{n-1+r}{r}2^m$ 种.因此,“有利于事件发生,且先发现甲盒为空”的抽法,有

$$a=\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}2^m$$

种.类似地,“有利于事件发生,且先发现乙盒为空”的抽法,也有 a 种,故总数为 $2a$,概率为

$$2a/2^{2n+1}=\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}\Big/2^{2n-m} \tag{2.9}$$

两种方法算出的结果,只能有一个.故比较(2.8)和(2.9),我们得到一个组合恒等式

$$\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{2n-m}{n}$$

当然,你也可以怀疑,这两个解法中有一个不对,因而上式也可能错了.但此式可另行证明.为方便计,将式中的 m 改为 $n-m$,而将该式写为

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{n+m}{n}=\binom{n+m}{m}$$

而因式易用数学归纳法证明:当 $m=0,1$ 时,直接计算可知其成

立,然后用易证之等式

$$\binom{n+m}{m}+\binom{n+m}{m+1}=\binom{n+m+1}{m+1}$$

去完成归纳证明.

这个例子给人的启发是:适当的考虑得出的简洁解法.第二种解法,把试验做到必然能见分晓的地步,较为自然易懂,但结果则繁复:要不是有(2.8)对照,我们可能停留在(2.9),而得出不理想的形式.前一解法抓住了这一点:要使所设事件发生,抽取必然是 $2n+1-m$ 次.这一简单的观察导致了远为简洁的解(2.8).

例 2.5 有 21 本不同的书,随机地分给 17 个人.问"有 6 人得 0 本,5 人得 1 本,2 人得 2 本,4 人得 3 本"这个事件 E 的概率是多少?

因为每本书都有 17 种可能的分法,故总的不同分法,有 17^{21} 种.为计算有利于事件 E 的分法,得分两步分析:①按得书本数不同把 17 人分成 4 堆,各堆分别含 6(0 本)、5(1 本)、2(2 本)、4(3 本)人.这不同的分法按公式(2.6),有 $17!/(6!\ 5!\ 2!\ 4!)$ 种.②把 21 本书按 17 人得书数情况分为 17 堆,各堆数目依次为

$$0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,2,2,3,3,3,3$$

不同分法有

$$21!/(0!^6 1!^5 2!^2 3!^4)=21!/(2!^2 3!^4)$$

二者相乘,得出有利于事件 E 的分法总数,进而得出 E 的概率为

$$17!\ 21!/(17^{21} 2!^3 3!^4 4!\ 5!\ 6!)$$

以上举的例子都有一定的代表性.古典概率计算实质上就是排列组合计算.但在分析问题时,怎样去选定一个适当的实现随机化的机制(如例 2.4,例 2.5),怎样去正确计算公式(1.1)中的 M,N,以保证既不重算也不漏算,则需要细心.尤其是:你所设想的机制是否真的实现了等可能性?有时表面上看想当然对,其实是似是而非的.如例 2.3 中,圆圈的情况和直线有所不同——在直线上正确地体现了等可能的做法,在圆圈上却没有.再看下例.

例 2.6 n 本书随机给分甲、乙二人,问"甲、乙各至少得到 1

本”这事件 E 的概率是多少?

n 本书随机地分给 2 人,甲得的本数无非是 $0,1,\cdots,n$,一共有 $n+1$ 种可能性,其中 0 和 n 两种是“全归一人”,剩下 $n-1$ 种有利于 E,故 $P(E)=(n-1)/(n+1)$.

这个解法是否对? 不对.问题在于:$0,1,\cdots,n$ 这 $n+1$ 种结果不具有等可能性.凭常识可以推想:若 n 较大,则甲得 $n/2$ 本左右的机会,应比他全得或全不得的机会大一些.正确的解法如下:n 本书分给 2 人,不同的分法有 2^n 种.其中仅有两种是使事件 E 不发生的,故 $P(E)$应为$(2^n-2)/2^n=1-1/2^{n-1}$.