习题提示与解答

第一章

3. B.

4. 一种可能的表法是

$$A_1+\cdots+A_n=A_1+(A_2-A_1)+[A_3-(A_1+A_2)]$$
$$+\cdots+[A_n-(A_1+\cdots+\cdots A_{n-1})]$$

5. 先把 $A+B+C$ 表为互斥事件和:

$$A+B+C=A+(B-AB)+(C-AC-\bar{A}BC)$$

再证明 $P(B-AB)=P(B)-P(AB)$,$P(C-AC-\bar{A}BC)=P(C)-P(AC)-P(\bar{A}BC)$,及 $P(\bar{A}BC)=P(BC)-P(ABC)$,整理即得.

6. 充要条件是 $P(A)$,$P(B)$中至少有一个为0.

7. 不一定.成立的充要条件是 $P(B-A)=0$.

8. 反复利用以下两个重要公式

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\sum_{i=1}^{n}\bar{A}_i,\ \overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\prod_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

(这两公式请自证一下)

9. 考虑一个盒子内含有三个球,其上分别标有数字1,2,3.现从中随机抽出一个,记事件

$A=\{$抽出1或2球$\}$,$B=\{$抽出2球$\}$,$C=\{$抽出2或3球$\}$

10. 第一问:直接计算 $P(C(A+B))=P(CA)+P(CB)$.第二问:仍算 $P(C(A+B))$,但把 $A+B$ 表为 $A+B=(A-B)+AB+(B-A)$.设法去证明

$$P(C(A-B))=P(C)P(A-B)$$
$$P(C(B-A))=P(C)P(B-A)$$

前一式可由 $P(CA)=P(C)P(A)$,$P(C\cdot AB)=P(C)P(AB)$两边相减得到,因 $CA-CAB=C(A-AB)=C(A-B)$,及 $P(A-$

$B) = P(A) - P(AB)$.

11. 例：一盒中有12个球，分别标有数字1,2,…,12.现从其中随机抽出一个，定义事件

$$A = \{\text{抽出 }1,2,3\text{ 号球之一}\}, B = \{\text{抽出 }2,3,4\text{ 号球之一}\}$$
$$C = \{\text{抽出 }2,3,5,6,7,8,9,10\text{ 号球之一}\}.$$

12. 前一部分的证明与第10题的第二问类似，反例可用11题的例子.

13. $A = A_1(A_2 + A_3)(A_4A_5 + A_5A_6 + A_4A_6)$用乘法定理，注意

$$P\overline{(A_4A_5 + A_5A_6 + A_4A_6)} = P(\bar{A}_4\bar{A}_5\bar{A}_6) + P(A_4\bar{A}_5\bar{A}_6) + P(\bar{A}_4A_5\bar{A}_6) + P(\bar{A}_4\bar{A}_5A_6)$$

逐项用乘法定理，答案：$320/729 = 0.439$.

14. 反例：一盒中有5个球，分别标上数字1,2,…,5.现从中随机抽出一个，定义事件

$$A = \{\text{抽出 1 或 2 球}\}, B = \{\text{抽出 2 或 3 球}\},$$
$$C = \{\text{抽出 1 或 3 球}\}$$

16. 需要证明

$$P(B_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_r}) = P(B_{i_1})P(B_{i_2})\cdots P(B_{i_r}) \qquad (1)$$

对任何满足条件$2 \leqslant r \leqslant n$的$r$及$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$.以$k$记$B_{i_1},\cdots,B_{i_r}$中$B_{i_j} = \bar{A}_{i_j}$的$j$的个数.对$k$实行归纳法.若$k = 0$，则由独立性定义知(1)式对.现设$k = m$时(1)式对.来证明当$k = m + 1$时(1)式也对.$B_{i_1},\cdots,B_{i_r}$中有$m + 1$个有“bar”的.为方便计且不失普遍性，不妨设$B_{i_1} = \bar{A}_{i_1}$.有

$$B_{i_2}B_{i_3}\cdots B_{i_r} = B_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_r} + A_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_r}$$

右边两事件互斥，故

$$P(B_{i_1}\cdots B_{i_r}) = P(B_{i_2}\cdots B_{i_r}) - P(A_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_r}) \qquad (2)$$

因为在$B_{i_2},\cdots,B_{i_r}$中只有m个加“bar”的，$A_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_r}$中也只有$m$个加“bar”的.故由归纳假设，知

$$P(B_{i_2}\cdots B_{i_r}) = P(B_{i_2})\cdots P(B_{i_r}),$$

$$P(A_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_r}) = P(A_{i_1})P(B_{i_2})\cdots P(B_{i_r})$$

以此代入(2)式,并注意 $1-P(A_{i_1})=P(\bar{A}_{i_1})=P(B_{i_1})$,得

$$P(B_{i_1}\cdots B_{i_r}) = P(B_{i_1})\cdots P(B_{i_r})$$

于是完成了归纳证明.

17. 总排列数为 $4!=24$. 分别计算放对 1,2,4 封的排列数为 8,6 和 1. 答案:$9/24=3/8$.

18. 用全概率公式,对丙而言,分四种情况:$A_1=\{$甲抽中,乙抽中$\}$,$A_2=\{$甲中乙不中$\}$,$A_3=\{$甲不中乙中$\}$,$A_4=\{$甲、乙都不中$\}$. 答案:2/10,17/55,41/110. 以丙抽中的可能性最大.

19. $(n!)^p\Big/\dfrac{(np)!}{(p!)^n}=(n!)^p(p!)^n/(np)!$

20. 再继续赌四局,排出一切可能情况,答案为 11:5.

21. 答案为 30/91. 其所以不同,原因在于,仔细一想可知:知道某特定骰子出幺,比知道至少出一个幺,要更有利于多出幺,因而更不利于得出大的和数.

22. 由对称性考虑,可让选定的一男孩固定一个位置. 剩下的 $n+m-1$ 个小孩归结到直线排列的情况.

23. 第一个事件的对立事件为"每方各有一张 A". 其概率为 $4!\ \dfrac{48!}{(12!)^4}\Big/\dfrac{(52)!}{(13!)^4}$. 后一事件比较复杂,要分解为一些互斥事件之和,即如

$\{$东方 $2A$,西、南各 $1A\}$ 等,共有 $4\times3=12$ 种;

$\{$东,西方各 $2A\}$ 等,共有 6 种.

前一事件概率为 $4!\ \dbinom{4}{2}\dfrac{48!}{11!\ (12!)^2 13!}\Big/\dfrac{52!}{(13!)^4}$,后一事件的概率为 $\dbinom{4}{2}\cdot\dbinom{4}{2}\cdot\dfrac{48!}{(11!)^2(13!)^2}\Big/\dfrac{52!}{(13!)^4}$,答案:0.719135654.

24. 最简单的做法如下:从对称考虑出发,不妨把甲取的点定在图 1 中的 A 点处. 这时,为了使题中所说的事件发生,乙所选的

点必须在图 1 中的 BAC 弧内,且$\angle BOA$ 和$\angle COA$ 都是 120°. 故概率为 2/3.

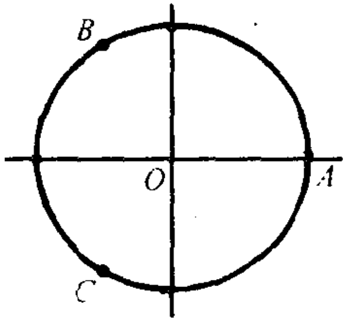

图 1

25. 做法大体上类似例 2.5. 答案为

$$\frac{7!}{2!1!1!3!}\cdot\frac{8!}{2!2!3!1!}\Big/7^8=0.1224.$$

27. (a) 所求概率为$(1-p_1)\cdots(1-p_n)$. 利用 $1-x<e^{-x}$ 当$x>0$. (b) 所求概率不超过$\sum^* p_{i1}\cdots p_{ik}$, $\sum^*$ 求和的范围为 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$ 但在$(p_1+\cdots+p_n)^k$ 的展开式中,每一个这样的项都出现 $k!$次.

28. 不可以那样算,理由与 21 题同.

30. 甲胜概率为(用全概率公式)

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}$$

不难证明 $p<1/2$. 因为

$$p=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}<1/2$$

因此这规则对甲不利. (p 的确值为 2log2 − 1,试证明之.)