习　题

1. 有 5 个事件, $A_1, \cdots, A_5$. 用它们表示以下的事件:

(a) $B_1 = \{A_1, \cdots, A_5$ 中至多发生 2 个$\}$

(b) $B_2 = \{A_1, \cdots, A_5$ 中至少发生 2 个$\}$

2. 证明:若 A, B 为两事件,则

(a) $A + B = A + (B - A)$,右边两事件互斥;

(b) $A + B = (A - B) + (B - A) + AB$,右边三事件互斥.

3. $(A + B) - (A - B) = ?$

4. 把 n 个任意事件 $A_1, \cdots, A_n$ 之和表为 n 个互斥事件之和.

5. 通过把 $A + B + C$ 表为适当的互斥事件之和,以证明

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

6. 有没有可能两件事 A, B 又互斥又独立?

7. $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 是否必成立? 何时成立?

8. 记 $C = \prod_{i=1}^{m} A_i + \prod_{j=1}^{n} B_j$, 通过 A_i, B_j 及其对立事件表出 $\overline{C}$.

9. 如果把 $P(A|B) > P(A)$ 理解为"B 对 A 有促进作用",则直观上似乎能设想如下的结论:"由 $P(A|B) > P(A)$ 及 $P(B|C) > P(B)$ 推出 $P(A|C) > P(A)$"(意思是:B 促进 A,C 促进 B,故 C 应促进 A). 举一简例证明上述直观看法不对.

10. 证明:若 A, C 独立, B, C 也独立,又 A, B 互斥,则 $A + B$ 与 C 独立.

更一般地,若 A, C 独立, B, C 独立, AB, C 也独立,则 $A + B$ 与 C 独立. 说明:上一结论是本结论的特例.

11. (接上题)若除了"A, C 独立, B, C 独立"之外,别无其他条件,则推不出 $A + B$ 与 C 独立,试举一反例以说明之.

12. 若 A, C 独立, B, C 独立, $A + B, C$ 也独立,则 AB 与 C 独立. 但若去掉"$A + B, C$ 也独立"的条件,则结论不再成立. 举一反例以说明之.

13. 办一件事件有 6 个关节,必须:①第 1 个关节要走通,②第 2,3 关节至少通一个,③第 4,5,6 关节至少通 2 个,事情才能办成.

(a) 设置必须的事件,以表出"事情办成"这个事件.

(b) 若各关节独立且每关节走通的机会为 2/3. 求事情能办成的概率.

14. 由 $P(A|B)>P(A)$ 推出 $P(B|A)>P(B)$. 直观上怎样解释这个事实.

你认为,由 $P(A|B)>P(A)$,$P(A|C)>P(A)$,能否推出 $P(A|BC)>P(A)$? 若认为能,请证明之,若认为不能,请举出反例.

15. 由 $P(A)>P(A|B)$ 推出 $P(A)<P(A|\overline{B})$. 指出一种可能的直观解释.

16. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立,而 $B_i=A_i$ 或 $\overline{A}_i$(不同的 i 可以不一样,例如,$B_1=A_1$,$B_2=\overline{A}_2$,等等),$i=1,\cdots,n$. 试用归纳法证明:$B_1,\cdots,B_n$ 也独立.

17. 一个秘书打好 4 封信和相应的 4 个信封. 但她将这 4 封信随机地放入这 4 个信封中,问"每封信都放得不对位"这事件的概率是多少?

18. 一盒内有 8 张空白券,2 张奖券,有甲、乙、丙三人按这个次序和以下的规则,各从此盒中随机抽出一张. 规则如下:每人抽出后,所抽那张不放回但补入两张非同类券(即:如抽出奖券,则放回 2 张空白券,等等). 问甲、乙、丙中奖的概率各有多大?

19. 某作家的全集共 p 卷,现买来 n 套(共 np 本),随机地分成 n 堆,每堆 p 本,问"每堆都组成整套全集"这事件的概率为多少.

20. 在例 1.1 中,把胜负规则改为"谁先胜四局者为胜". 问在甲 2 胜 1 负的情况下中止赌博,应按怎样的比例瓜分赌本才算公平?

21. 把例 3.1 中的事件 B 的定义改为:$B=\{$至少有一个骰子掷出么点$\}$,求该例中事件 A 的条件概率 $P(A|B)$.

直观上看结果应相同,但算出的结果不同,如何解释?

22. 在例 2.3 中,把"排成一列"改为"排成一圆圈". 证明例中所说的事件 A 的概率为 $\binom{n}{m}\Big/\binom{n+m-1}{m}$.

23. 四人打桥牌,问:"至少有一方没有 A"及"至少有一方恰有两个 A"这两个事件的概率.

24. 有一个半径为 1 的圆周 C. 甲、乙二人各自独立地从圆周上随机地取一点,将两点连成一条弦 l,用几何概率的方法计算"圆心到 l 的距离不小于 1/2"这个事件的概率.

25. 把 8 个可以分辨的球随机地放入 7 个可以分辨的盒子中,问"其中有两个盒各得 2 球,一个盒得 3 球,一个盒得 1 球"这事件的概率是多少?

26. 设男女两性人口之比为 51:49. 又设男人色盲率为 2%,女人色盲率

为 0.25%.现随机抽到一个人为色盲,问“该人为男人”的概率是多少?

27. 设有 n 个独立事件 $A_1,\cdots,A_n$,其概率分别为 $p_1,\cdots,p_n$,记 $p=p_1+\cdots+p_n$.设 $0<p_i<1,i=1,\cdots,n$.证明:

(a) “$A_1,\cdots,A_n$ 都不发生”这个事件的概率小于 e^{-p}.

(b) “$A_1,\cdots,A_n$ 中至少发生 k 个”这事件的概率小于 $p^k/k!$.

28. 投掷 10 粒均匀骰子,记事件

$$A=\{至少有 2 粒骰子出么点\}$$
$$B=\{至少有 1 粒骰子出么点\}$$

求条件概率 $P(A|B)$.

这个题可不可以这样算:既然已知至少掷出一个么点,不妨(因各骰子地位对称)就设第一粒骰子掷出么点.因而所求的条件概率为:掷 9 粒骰子至少出现一个么的概率,即 $1-(5/6)^9$.为什么?

29. 假定某种病菌在全人口的带菌率为 10%,又在检测时,带菌者呈阳、阴性反应的概率为 0.95 和 0.05,而不带菌者呈阳、阴性反应的概率则为 0.01 和 0.99.今某人独立地检测三次,发现 2 次呈阳性反应,1 次呈阴性反应.问:“该人为带菌者”的概率是多少?

30. 甲、乙二人约定了这样一个赌博规则:有无穷个盒子,编号为 n 的盒子中,有 n 红球 1 白球,$n=1,2,\cdots$,然后甲拿一个均匀铜板掷到出现正面为止.若到这时甲掷了 n 次,则甲在编号为 n 的盒子中抽出一个球,如抽到白球算甲胜,否则乙胜.你认为这规则对谁更有利?