# 第二章

1. 用公式$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$(见 1.2 节)

2. 先用全概率公式得出 $p_n$ 的逆推公式

$$p_n = p(1-p_{n-1})+(1-p)p_{n-1}$$

此式推导如下:若第一次试验 $A$ 发生(概率为 $p$),则剩下 $n-1$ 次

试验应出奇数个 $A$，概率等于 $1-p_{n-1}$. 若第一次试验中 $A$ 不发生(概率为 $1-p$)，则剩下 $n-1$ 次试验应出偶数个 $A$，概率等于 $p_{n-1}$. 又当 $n=1$ 时 $p_n=p_1=1-p$，而 $\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$ 当 $n=1$ 时也为 $1-p$. 故当 $n=1$ 时正确. 设当 $n-1$ 时正确，则 $p_{n-1}=\frac{1}{2}[1+(1-2p)^{n-1}]$. 以此代入上式，即得 $p_n=\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$. 故当 $n$ 时亦正确.

3. 答案为 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$. 用公式 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$. 此式可由第一章(2.5)式中令 $m=k=n$，并注意 $\binom{n}{n-i}=\binom{n}{i}$ 而得到.

4. 赌博至多在 $2a-1$ 局结束，让二人赌 $2a-1$ 局，则只要甲胜 $a$ 局或更多则甲胜，否则甲败，故甲胜的概率为 $\sum_{i=a}^{2a-1}b(i;2a-1,p)$. 当 $p=1/2$ 时，由 $b(i;2a-1,1/2)=b(2a-1-i;2a-1,1/2)$ 即知上式为 $1/2$. 另外由二人赌技相同($p=1/2$)，及胜负规则对二人是公平的，知二人有相同的获胜概率，即 $1/2$.

5. 考察比值

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k+1;n,p)}=\frac{k+1}{n-k}\frac{1-p}{p}$$

如果 $p\leqslant(n+1)^{-1}$，则此比值总 $\geqslant 1$. 若 $p\geqslant n/(n+1)$，则总 $\leqslant 1$. 若 $(n+1)^{-1}<p<n/(n+1)$，则当 $k$ 小时大于 1，从某个 $k$ 开始则 $\leqslant 1$. 其转折处即达到最大之 $k$. 为 $[(n+1)p]$（$[a]$ 表不超过 $a$ 的最大整数），当 $(n+1)p$ 不为整数；为 $(n+1)p$ 及 $(n+1)p-1$（在这两个值处同时达到最大），如 $(n+1)p$ 为整数.

6. 以 $p_{ij}$ 记"恰有第 $i,j$ 盒不空，其余都空"的概率. 先证明所求概率 $p=\binom{12}{2}p_{12}$. 而后证明

$$p_{12}=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}-2\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$$

"全在 1,2 盒内"的概率—"全在 1 盒内"的概率 = "全在 2 盒内"的

概率).

7.(a)$p$ 大了,$X$ 取大值的概率上升而取小值的概率下降.故$\{X\leqslant k\}$的概率当 $p$ 上升时只能下降.(b)考察一个试验,有三个可能的结果:$A_1,A_2,A_3$,其概率分别为 $p_1,p_2-p_1$ 和 $1-p_2$,记 $A=A_1+A_2$.以 $X_i$ 记$n$ 次试验中$A_i$ 发生的次数,$i=1,2$,则$X_1\sim B(n,p_1),X_1+X_2\sim B(n,p_2)$.故

$$P(X_1\leqslant k)=\sum_{i=0}^{k}b(i;n,p_1),$$

$$P(X_1+X_2\leqslant k)=\sum_{i=0}^{k}b(i;n,p_2)$$

因为当 $X_1+X_2\leqslant k$ 时必有$X_1\leqslant k$,故 $P(X_1+X_2\leqslant k)\leqslant P(X_1\leqslant k)$,即当 $p_1<p_2$ 时有

$$\sum_{i=0}^{k}b(i;n,p_2)\leqslant\sum_{i=0}^{k}b(i;n,p_1)$$

(c) 写出 $f(p)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$. 逐项求导数.注意

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}/\mathrm{d}p\\&=i\binom{n}{i}p^{i-1}(1-p)^{n-i}-(n-i)\cdot\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i-1}\end{aligned}$$

令 $i=0,1,\cdots,k$ 相加,只剩下一项 $-(n-k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k-1}$,证明它与$\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^{1-p}t^k(1-t)^{n-k-1}\mathrm{d}t$ 的导数同.又当 $p=1$时此积分为0,而$P(X\leqslant k)$也为0(因 $k<n$).故二者必相等).

8.由于 $B(2,p)$有三个可能值 0,1,2,而 $X_1,X_2$ 独立同分布,故 $X_1,X_2$ 必都只有 2 个可能值(否则 $X_1+X_2$ 的取值个数可能会小于 3 或大于 3.这两个可能值必为 0,1.因为,设可能值为 $a,b,a<b$,则 $2a=0,2b=2,a+b=1$.记 $p_1=P(X_1=1),p_2=P(X_2=1)$则

$$p^2 = P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = p_1 p_2$$

故 $p^2 = p_1 p_2$ 仿上推理，有

$$p^2 = p_1 p_2, (1 - p)^2 = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

$$2p(1 - p) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2$$

由此三式，不难解出 $p_1 = p_2 = p$.

10.(a)设 $\lambda_1 < \lambda_2$，$X_1, X_2$ 独立，分别服从波哇松分布 $P(\lambda_1)$ 和 $P(\lambda_2 - \lambda_1)$，则 $X_1 + X_2$ 服从波哇松分布 $P(\lambda_2)$. 再由 $P(X_1 \leqslant k) \geqslant P(X_1 + X_2 \leqslant k)$ 即推出所要的结果.(b)写出 $P(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^i / i!$，证明其导数等于 $-e^{-\lambda}\lambda^k / k!$. 故 $\frac{1}{k!}\int_{\lambda}^{\infty} t^k e^{-t} dt - \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^i / i!$ 为一常数 $C$（与 $\lambda$ 无关）. 但当 $\lambda \to 0$ 时，它趋于 0，故 $C = 0$.

11. 与第 5 题相似，考察比 $p_\lambda(k) / p_\lambda(k + 1)$.

12. 直接计算：$P(E_1) = b(n; N, p')$（$p' = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2$），$P(E_1E_2) = \frac{N!}{k!\ (n-k)!\ (N-n)!}(p_1(1 - p_2))^k((1 - p_1)p_2)^{n-k}(p'')^{N-n}$（$p'' = p_1p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)$，是 $(A, B) + (\bar{A}, \bar{B})$ 发生的概率）. 再算出 $P(E_2 | E_1) = P(E_1E_2) / P(E_1)$ 即得（注意 $p' + p'' = 1$）. 直接方法：注意 $P((A, \bar{B}) | (A, \bar{B}) + (\bar{A}, B)) = p$. 故在 $E_1$ 发生的条件下，$(A, \bar{B})$ 出现的次数 $X$ 的条件分布，就是 $B(n, p)$.

13. 把负二项概率(1.11)记为 $d(i; r, p)$. 所要证的结果当 $r = 1$ 时对. 设当 $r = k - 1$ 时对，则 $X_1 + \cdots + X_{k-1}$ 服从分布 $b(i; k - 1, p)$ 把 $X_1 + \cdots + X_k$ 表为 $Y + X_k$，$Y = X_1 + \cdots + X_{k-1}$. 按上述归纳假设，及 $Y$ 与 $X_k$ 独立，有

$$P(X_1 + \cdots + X_k = i) = \sum_{j=0}^{i} P(Y = j)P(X_k = i - j)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} d(j; k - 1, p)p(1 - p)^{i-j}$$

为要证此式为 $d(i,k,p)$，只须证组合等式

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{j+r-2}{r-2}=\binom{i+r-1}{r-1}$$

但此式已在第一章例 2.4 中证过，那里写为形式

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{n+m}{n}$$

令 $n-1=r-2, r=j, m=i$，并注意 $\binom{n-1+r}{r}=\binom{n-1+r}{n-1}$.

直观上很容易解释，以 $r=2$ 为例，如图 2，· 表示 $A$ 不发生而 × 表示 $A$ 发生. 在 $A$ 发生第 2 次时，· 的个数为 $X_1+X_2$. 由于各次试验独立，$X_1$，$X_2$ 必独立且都服从几何分布.

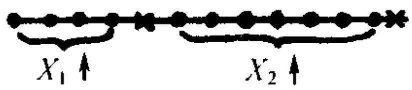


图 2

14. $p_1=\binom{i+r}{r}p^r(1-p)^i$，$p_2=\binom{i+r-1}{r-1}p^r(1-p)^i$. 因为有 $\binom{i+r}{r}>\binom{i+r-1}{r-1}$（除非 $i=0$），故总有 $p_1>p_2$. 理由很简单：计算 $p_2$ 时多了一个限制：最后一次试验 $A$ 必出现，而算 $p_1$ 时，并无这个限制.

15. 用全概率公式易得

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)b(k;n,p)\\&=\sum_{n=k}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{(\lambda p)^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}\end{aligned}$$

而式中的和等于 $\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}$.

16. 计算 $P(X+Y\leqslant u)$. 用全概率公式，并以 $F$ 记 $X$ 的分布函数，有

$$P(X+Y\leqslant u)=P(Y=a_1)P(X+a_1\leqslant u)$$

$$+ P(Y = a_2) \cdot P(X + a_2 \leqslant u)$$

$$= p_1 F(u - a_1) + p_2 F(u - a_2)$$

对 $u$ 求导数即得，推广到多于两个值的情况显然.

17. 结果为 $\int_0^{\infty} f(w, z/w) w^{-1} \mathrm{d}w$.

18. 当 $a_i$ 中有为 0 的时，不妨设 $a_1 = 0$. 这时

$$P(XY = 0) \geqslant P(Y = 0) = p_1 > 0$$

故 $XY$ 不能有密度函数(否则应用 $P(XY = 0) = 0$). 如 $a_i$ 都不为 0，则仿 16 题做，只须注意

$$P(a_i X \leqslant u) = \begin{cases} F(u/a_i), a_i > 0 \\ 1 - F(u/a_i), a_i < 0 \end{cases}$$

$F$ 为 $X$ 的分布函数，二者对 $u$ 的导数都是 $\frac{1}{|a_i|} f\left(\frac{u}{a_i}\right)$.

19. 记 $F(x) = P(Y \leqslant x)$. 当 $x \leqslant 0$ 时，$F(x) = 0$. 若 $x > 0$，则注意

$$\{Y \leqslant x\} = \{\log Y \leqslant \log x\}$$

$$= \{(\log Y - a)/\sigma \leqslant (\log x - a)/\sigma\}$$

故 $F(x) = \Phi((\log x - a)/\sigma)$. 对 $x$ 求导得 $f(x)$.

21. 记 $F(x) = P(Y \leqslant x)$，则 $F(x) = 0$ 当 $x \leqslant -1$，$= 1$ 当 $x \geqslant 1$. 若 $|x| < 1$，则在基本周期 $[0.2\pi)$ 内，事件 $\{Y \leqslant x\}$ 等于 $\{\arccos x \leqslant X \leqslant 2\pi - \arccos x\}$，其中 $\arccos x$ 在 $(0, \pi)$ 内，故

$$\{Y \leqslant x\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [2\pi i + \arccos x \leqslant X \leqslant 2\pi(i+1) - \arccos x]$$

于是

$$F(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi(2\pi(i+1) + \arccos x) - \Phi(2\pi i - \arccos x)]$$

逐项对 $x$ 求导，即得 $f(x)$.

22. 注意 $\{Y \leqslant x\} = \prod_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant x\}$. 于是得 $Y$ 的分布函数为 $F^n(x)$. 对 $Z$，注意 $\{Z \geqslant x\} = \prod_{i=1}^{n} \{X_i \geqslant x\}$. 于是 $P(Z \leqslant x) =$

$1-P(Z\geqslant x)=1-(1-F(x))^n$. 对 $x$ 求导得密度函数.

23. 直接证明,只须注意本题 $F(x)=x/\theta(0\leqslant x\leqslant\theta)$,而 $f(x)=1/\theta(0\leqslant x\leqslant\theta)$,其外为 0). 直观看法:$\theta-\max(X_1,\cdots,X_n)$为 $X_1,\cdots,X_n$ 的最右点与边界 $\theta$ 的距离. 而 $\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的最左点与边界 0 的距离. 二者性质一样只是看的方向不同. 由于均匀分布对区间内各处一视同仁,这两个距离的概率分布应当一样.

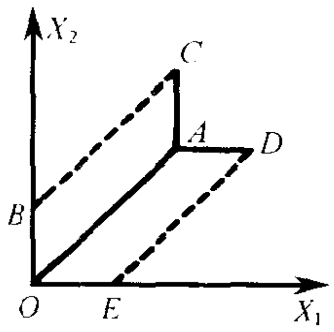

图 3

24. 考察事件$\{Y_1\leqslant u, Y_2\leqslant v\}$. 看图 3,$OA$ 为第一象限分角线,$A$ 点的坐标为$(u,u)$,$OB$ 和 $OE$ 之长都为 $v$,而 $OBCA$ 和 $OEDA$ 都是平行四边形,稍加思考即不难发现.

$\{Y_1\leqslant u, Y_2\leqslant v\}=\{(X_1,X_2)$落在上述两个平行四边形内$\}$. 故

$$P\{Y_1\leqslant u, Y_2\leqslant v\}=\iint\limits_{OBCA}\mathrm{e}^{-x_1-x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$+\iint\limits_{OEDA}\mathrm{e}^{-x_1-x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

由对称性,这两积分之值同,用累积分法算第一个积分(先固定 $x_1$ 对 $x_2$ 积),不难得出上述两积分之和为$(1-\mathrm{e}^{-2u})(1-\mathrm{e}^{-v})$. 由此证明了题中的所有结论.

25. 用归纳法,先肯定:当 $n=0$ 时,不论 $T>0$ 取什么值,$P(X=0)=\mathrm{e}^{-\lambda T}$成立. 这很明显,因为 $X=0$ 意味着最初那个元件的寿命$\geqslant T$,其概率 $\int_T^\infty\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda T}$.

现假定公式 $P(X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$ 对 $n=k-1$ 成立,而计算 $P(X=k)$. 以 $x_1$ 记第一次替换发生的时刻,则在给定 $X_1$ 的条件下,在时段$(X_1,T)$内要发生 $k-1$ 替换. 这时段之长为 $T-x_1$. 按归纳假设,在这段时间内恰好替换 $k-1$ 次的概率,为

$e^{-\lambda(T-x_1)}(\lambda(T-x_1))^{k-1}/(k-1)!$ 由于 $X_1$ 只能在 $(0,T)$ 内且其概率密度为 $\lambda e^{-\lambda x_1}$,故

$$P(X=k)=\int_0^T \lambda e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(T-x_1)}(\lambda(T-x_1))^{k-1}dx_1/(k-1)!$$

易见此积分为 $e^{-\lambda T}(\lambda T)^k/k!$,于是证明了公式当 $n=k$ 时成立,而完成了归纳证明.

27. 用公式(4.10)算出 $(X+bY,X-bY)$ 的联合密度 $g(u,v)$.再决定 $b$,使这联合密度可拆成两个函数 $g_1(u)$ 和 $g_2(v)$ 之积,答案:$b=\sigma_1/\sigma_2$.此题有其他简单方法,见第三章习题.

29. 设 $X_1,\cdots,X_k,Y_1,\cdots,Y_n$ 独立同分布,各服从标准正态分布 $N(0,1)$.记

$$Z_1=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k X_i^2\Big/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2,\quad Z_2=\sum_{i=1}^k X_i^2\Big/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2$$

$$Z_3=X_1^2\Big/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2$$

则 $Z_1\sim F_{k,n},Z_3\sim F_{1,n},Z_2\geqslant Z_3$.今有

$$P(Z_1\geqslant F_{k,n}(\alpha))=\alpha$$

故有:$P(Z_2\geqslant kF_{k,n}(\alpha))=\alpha$,另一方面,又有

$$P(Z_1\geqslant F_{1,n}(\alpha))=\alpha$$

由这两式,及 $Z_2\geqslant Z_1$,即得 $kF_{k,n}(\alpha)\geqslant F_{1,n}(\alpha)$.

30. 易见 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} xy\,dx\,dy=0$.故为证明 $g$ 是密度函数,只须证明它非负.但 $|xy|$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内的最大值小于1,而 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内的最小值为 $e^{-1/2}/2\pi>1/100$.故知 $g$ 非负.

后一结论易证,因为对任何 $a>0$ 有 $\int_{-a}^a x\,dx=0$.