附　录

A. 公式(4.25)的证明

由等式

$$\int_0^\infty u^{x+y-1}v^{x-1}e^{-u(1+v)}dv = e^{-u}u^{y-1}\int_0^\infty (uv)^{x-1}e^{uu}u\,dv$$

出发,作变数代换 $\omega = uv$,知右边的积分等于 $\int_0^\infty \omega^{x-1}e^{-\omega}d\omega$ 即 $\Gamma(x)$. 于是

$$\int_0^\infty u^{x+y-1}v^{x-1}e^{-u(1+v)}dv = e^{-u}u^{y-1}\Gamma(x)$$

两边对 u 从 0 到 ∞ 积分,得

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u(1+v)}du\right]v^{x-1}dv$$

对里面的积分作变数代换 $t = u(1+v)$,有

$$\int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u(1+v)}du$$

$$= (1+v)^{-(x+y)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+y-1}dt$$

$$= (1+v)^{-(x+y)}\Gamma(x+y)$$

代入上式得

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\int_0^{\infty} v^{x-1}(1+v)^{-(x+y)}\mathrm{d}v \qquad (1)$$

作变数代换 $t=v/(1+v)$. 当 v 由 0 变到 ∞ 时, t 由 0 变到 1. 又

$$\begin{aligned} & v^{(x-1)}(1+v)^{-(x+y)} \\ =& (v/(1+v))^{x-1}(1+v)^{-(y+1)} \\ =& t^{x-1}(1-t)^{y+1} \end{aligned}$$

因而 $v=t/(1-t)$, 有 $\mathrm{d}v=(1-t)^{-2}\mathrm{d}t$. 故

$$\int_0^{\infty} v^{x-1}(1+v)^{-(x+y)}\mathrm{d}v = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \beta(x,y) \qquad (2)$$

由(1),(2)两式即得(4.25).

B. (4.33)—(4.36)的证明

这个证明要求读者对正交方阵有初步知识. 先证明下面的预备事实:

引理 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid, $\sim N(\mu, \sigma^2)$. 记 $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. 则

a. $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$,

b. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$,

c. $\overline{X}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 独立.

证 找一个 n 阶正交方阵 A, 其第一行各元都是 $1/\sqrt{n}$. 作正交变换

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

由于 A 为正交变换, 它不改变平方和, 即 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$. 又因正交方阵的行列式为 1, 根据公式(4.15), 注意到 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的密度函数为

$$(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i+n\mu^2\right)\right]$$

以及 $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sqrt{n}y_1$(这是因为 A 的第一行各元都是 $1/\sqrt{n}$,因而 $y_1=(x_1+\cdots+x_n)/\sqrt{n}$),得知$(Y_1,\cdots,Y_n)$的密度函数为

$$(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\mu\sqrt{n}y_1+n\mu^2\right)\right]$$

$$=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\mathrm{e}^{-(y_1-\sqrt{n}\mu)^2/2\sigma^2}\cdot(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\mathrm{e}^{-y_2^2/2\sigma^2}\cdots$$
$$\cdot(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\mathrm{e}^{-y_n^2/2\sigma^2}$$

因此,$(Y_1,\cdots,Y_n)$的密度可分解为 n 个函数的乘积,每个函数只依赖一个变量.据定理 3.2,即知 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 独立,且

$$Y_1\sim N(\sqrt{n}\mu,\sigma^2),Y_i\sim N(0,\sigma^2),i=2,\cdots,n \tag{3}$$

再据定理 3.3,Y_1 与 $Y_2^2+\cdots+Y_n^2$ 独立,但

$$\sum_{i=2}^{n}Y_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-Y_1^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\Big/n=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{4}$$

而 $Y_1=\sqrt{n}\overline{X}$.这证明了 c.a 和 b 由(3),(4)及卡方分布的定义立即得出.引理证毕.

有了这个引理就不难得出(4.33)-(4.36).事实上,(4.33)就是这引理的 b.为证(4.34),注意$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ 服从正态分布 $N(0,1)$,由引理的 b,S/σ 的分布与$\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}$的分布相同.又按引理的 c,$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)$与 S 独立.于是由 t 分布的定义即得(4.34).(4.35)由引理的 b 及 F 分布的定义得出.

(4.36)的证明略复杂一些.暂记 $Z_1=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,Z_2=$

$\sum_{i=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2$.据引理的 c,$\overline{X}$ 与 Z_1 独立,$\overline{Y}$ 与 Z_2 独立,又因 $X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m$ 全体独立,故$\overline{X},\overline{Y},Z_1,Z_2$ 四者独立.因为$\overline{X}\sim N(\mu_1,\sigma^2/n)$,$\overline{Y}\sim N(\mu_2,\sigma^2/m)$,$\sigma^2$ 为 σ_1^2 和 σ_2^2 的公共值,据例 4.8,知$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma^2/n+\sigma^2/m)$,因而$\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\frac{1}{\sigma}[(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)]\sim N(0,1)$.又据(4.33),有 $Z_1/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$,$Z_2/\sigma^2\sim\chi_{m-1}^2$,因 Z_1,Z_2 独立,按卡方分布的性质,有$(Z_1+Z_2)/\sigma^2\sim\chi_{n+m-2}^2$.因$\overline{X},\overline{Y},Z_1,Z_2$ 四者独立,按第二章定理 3.3,知

$$W_1=\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\frac{1}{\sigma}[(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)]\text{ 与}$$

$$W_2=\left[\frac{1}{(n+m-2)\sigma^2}(Z_1+Z_2)\right]^{1/2}\text{ 二者独立}$$

按 t 分布的定义知,$W_1/W_2\sim t_{n+m-2}$.这就证明了(4.36).

可以注意一下这些结果中的自由度数目.在(4.33),$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为 n 个量的平方和,为何自由度只有 $n-1$?这是因为,$X_1-\overline{X},\cdots,X_n-\overline{X}$ 这 n 个量并不能自由变化,而是受到一个约束,即 $\sum_{i=2}^{n}(X_i-\overline{X})=0$.这使它的自由度少了一个.(4.36)中的自由度是 $n+m-2$ 也一样地解释:一共有 $n+m$ 个量 $X_i-\overline{X}(i=1,\cdots,n)$ 和 $Y_j-\overline{Y}(j=1,\cdots,m)$ 取平方和.它们受到两个结束,即 $\sum(X_i-\overline{X})=0$,$\sum(Y_j-\overline{Y})=0$.少了两个自由度,故自由度不为 $n+m$ 而为 $n+m-2$.

在第四章例 3.2 中,将给自由度这个概念以另一个解释.不言而喻,不同的解释只是形式上的差别,实质并无不同.