习　　题

1. 某事件 A 在一次试验中发生的概率为 1/2. 将试验独立地重复 n 次. 证明:“A 发生偶数次”的概率为 1/2, 不论 n 如何(0 算偶数).

2. 在上题中,若 A 在一次试验中发生的概率为 p,则"A 发生偶数次"的概率为 $p_n = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$.用归纳法.

3. 两人分别各拿一个均匀铜板投掷 n 次(每次掷出正、反面的概率都是 $1/2$).问:"两个掷出的正面数相同"这事件的概率是多少?

4. 甲、乙二人赌博.每局甲胜的概率为 p,乙胜的概率为 $q=1-p$.约定:赌到有人胜满 a 局为止,到这时即算他获胜.(a) 求甲胜的概率.(b) 若 $p=1/2$,用(a) 的结果以及用直接推理,证明甲胜的概率为 $1/2$.

5. 以 $b(k;n,p)$ 记二项分布概率 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.证明:(a)若 $p\leqslant 1/(n+1)$,则当 k 增加时 $b(k;n,p)$非增.(b)若 $p\geqslant 1-1/(n+1)$,则当 k 增加时 $b(k;n,p)$非降.(c)若 $1/(n+1)<p<1-1/(n+1)$,则当 k 增加时,$b(k;n,p)$先增后降.求使 $b(k;n,p)$达到最大的 k.

6.10 个球随机地放进 12 个盒子中,问:"空盒(不含球的盒)数目为 10"这事件的概率是多少?

7. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$,k 为小于 n 的非负整数,记 $f(p)=P(X\leqslant k)$.

(a) 用直观说理的方法指明:$f(p)$随 p 增加而下降.

(b) 用概率方法证明(a)中的结果.

(c) 建立恒等式

$$f(p)=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^{1-p}t^k(1-t)^{n-k-1}\mathrm{d}t$$

从而用分析方法证明了(a)中之结论.

8. 设随机变量 X_1,X_2 独立同分布,而 X_1+X_2 服从二项分布 $B(2,p)$.则 X_1,X_2 都服从二项分布 $B(1,p)$(即 $P(X_1=1)=p,p(X_1=0)=1-p$),若只假定 X_1,X_2 独立且都只取 0,1 为值,这结论也对.

9. 在超几何分布(1.10)中固定 n,m,令 $N\to\infty,M\to\infty$但 $M/N\to p,0\leqslant p\leqslant 1$.证明:(1.10)以 $b(m;n,p)$为极限.

10. 设随机变量 X 服从波哇松分布$P(\lambda)$.k 为正整数.

(a) 用概率方法证明:$P(X\leqslant k)$随 λ 增加而下降.

(b) 建立恒等式

$$P(X\leqslant k)=\frac{1}{k!}\int_\lambda^\infty t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

从而用分析方法证明(a)中之结论.

11. 记 $p_\lambda(k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$. 证明:(a)若 $\lambda\leqslant 1$,则 $p_\lambda(k)$随 k 增加而非增. (b)若 $\lambda>1$,则 $p_\lambda(k)$先增后降,找出使 $p_\lambda(k)$达到最大的 k.

12. 有一个大试验由两个独立的小试验构成. 在第一个小试验中,观察某事件 A 是否发生,A 发生的概率为 p_1;在第二个小试验中,观察某事件 B 是否发生,B 发生的概率为 p_2. 故这个大试验有 4 个可能结果:(A,B),$(\overline{A},\overline{B})$,$(A,\overline{B})$,$(\overline{A},B)$. 把这大试验重复 N 次. 记

$$E_1=\{(A,\overline{B}),(\overline{A},B)\text{ 总共发生 } n \text{ 次}\}$$

$$E_2=\{((A,\overline{B})\text{ 发生 } k \text{ 次}\}$$

计算条件概率 $P(E_2|E_1)$,证明它等于 $b(k;n,p)$,其中 $p=p_1(1-p_2)/[p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2]$,并用直接方法(不通过按条件概率公式计算)证明这个结果.

13. 设 $X_1,\cdots,X_r$ 独立同分布,其公共分布为几何分布(1.12). 用归纳法证明:$X_1+\cdots+X_r$ 服从负二项分布(1.11). 又:对这个结果作一直观上的解释,因而得出一简单证法.

14. 在一串独立试验中观察某事件 A 是否发生,每次 A 发生的概率都是 p. 有以下两个概率:(1) $p_1=$ 做 $i+r$ 次试验,A 出现 r 次的概率. (2) $p_2=$ 做试验直到 A 出现 r 次为止,到此时 A 有 i 次不出现的概率. 二者都是做 $i+r$ 次而 A 出现 r 次,但总有 $p_1>p_2$. 证明这一事实并给一解释.

15. 先观察一个服从波哇松分布 $P(\lambda)$的随机变量之值 X,然后做 X 次独立试验,在每次试验中某事件 A 发生的概率为 p. 以 Y 记在这 X 次试验中 A 发生的次数,证明:Y 服从波哇松分布 $P(\lambda p)$.

16. 设随机变量 X,Y 独立,X 有概率密度 $f(x)$,而 Y 为离散型,只取两个值 a_1 和 a_2,概率分别为 p_1 和 p_2. 证明:$X+Y$ 有概率密度 $h(x)$:

$$h(x)=p_1f(x-a_1)+p_2f(x-a_2)$$

把这个结果推广到 Y 取任意有限个值以至无限个值(但仍为离散型)的情况.

17. 设 X,Y 独立,各有概率密度函数 $f(x)$和 $g(y)$,且 X 只取大于 0 的值. 用以下两种方法计算 $Z=XY$ 的概率密度,并证明结果一致:

(a) 利用变换 $Z=XY,W=X$.

(b) 把 XY 表为 Y/X^{-1}. 先算出 X^{-1} 的密度,再用商的密度公式(4.29).

18. 设 X,Y 独立,X 有概率密度 $f(x)$,Y 为离散型,其分布为.

$$P(X=a_i)=p_i, i=1,2,\cdots, p_i>0, i=1,2,\cdots$$

证明:若 $a_1,a_2,\cdots$都不为 0,则 XY 有密度函数

$$h(x)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i |a_i|^{-1} f(x/a_i)$$

若 $a_1,a_2,\cdots$中有为 0 的,则 XY 没有概率密度函数.

19. 设 Y 为只取正值的随机变量,且 $\log Y$ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$. 求 Y 的密度函数(Y 的分布称为对数正态分布).

20. 设 X 服从自由度为 n 的 t 分布,而 $Y=X/\sqrt{a+X^2}$,其中 $a>0$ 为常数,试求 Y 的密度函数.

21. 设 $X\sim N(0,1)$, $Y=\cos X$,求 Y 的密度函数.

22. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布,X_1 有分布函数 $F(x)$和密度函数 $f(x)$.记

$$Y=\max(X_1,\cdots,X_n), Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$$

证明:Y,Z 分别有概率密度函数 $nF^{n-1}(x)f(x)$和 $n[1-F(x)]^{n-1}\cdot f(x)$.

23. 续上题,若 $F(X)$为$[0,\theta]$上的均匀分布($\theta>0$ 为常数).用上题结果证明:$\theta-\max(X_1,\cdots,X_n)$与 $\min(X_1,\cdots,X_n)$的分布相同,并从对称的观点对这个结果作一直观的解释.

24. 设 X_1,X_2 独立同分布,其公共密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, \quad x\leqslant 0 \end{cases}$$

记 $Y_1=\min(X_1,X_2)$, $Y_1=\max(X_1,X_2)-\min(X_1,X_2)$. 证明:$Y_1$ 与 Y_2 独立,Y_1 的分布与 $X_1/2$ 的分布同,Y_2 的分布与 X_1 同(直接计算概率 $P(Y_1\leqslant u, Y_2\leqslant v)$).

25. 一大批元件其寿命服从指数分布(1.21). 固定一个时间 $T>0$. 让一个元件从时刻 0 开始工作. 每当这元件坏了马上用一个新的替换之. 以 X 记到时刻 T 为止的替换次数. 证明:X 服从波哇松分布 $P(\lambda T)$,即 $P(X=n)=e^{-\lambda T n}/n!$ (用归纳法,详见提示).

26. 证明 $F_{m,n}(a)=F_{n,m}(1-a)$, $0<a<1$.

27. 设(X,Y)服从二维正态分布 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 证明:必存在常数 b,使 $X+bY$ 与 $X-bY$ 独立.

28. 设(X,Y)有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{c}{1+x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1 \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2>1 \end{cases}$$

(a) 求出常数 c.(b)算出 X,Y 的边缘分布密度,并证明 X,Y 不独立.

29. 证明:对任何自然数 k,n 及 $0<a<1$,有

$$kF_{k,n}(a)\geqslant F_{1,n}(a)$$

(实际成立严格不等号).

30. 设 X,Y 独立,都服从标准正态分布 $N(0,1)$,以 $f(x,y)$记(X,Y)的联合密度函数.证明:函数

$$g(x,y)=\begin{cases}f(x,y)+xy/100, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1\\ f(x,y), & \text{当 } x^2+y^2>1\end{cases}$$

是二维概率密度函数.若随机向量(U,V)有密度函数 $g(x,y)$,证明:U,V 都服从标准正态分布$N(0,1)$,但(U,V)不服从二维正态分布:

本例说明:由各分量为正态推不出联合分布为正态.