第三章

1. 不直接利用对数正态分布密度算较方便. 按定义,若 X 为对数正态分布,则 $X=e^{Y}$, $Y\sim N(a,\sigma^2)$. 于是可利用公式(1.18). 这涉及计算形如

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{bx} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx$$

的积分. 把 $bx-(x-a)^2/2\sigma^2$ 写为 $-(x-c)^2/2\sigma^2+d$ 的形式,其中 $c=a+b\sigma^2$,即不难算出上述积分.

2. 易见它只与区间之长 $b-a$ 有关(何故). 记 $\theta=(b-a)/2$,可就 $R(-\theta,\theta)$的情况算,结果为 $9/5-3=-6/5$.

3. 设 X 服从超几何分布(第二章例 1.4),可把 X 表为 $X_1+\cdots+X_n$,这是设想 n 个产品一件一件抽出,$X_i=0$ 或 1 视第 i 个产品为合格品或否而定,先证明

$$P(X_i=1)=M/N, P(X_i=0)=1-M/N, i=1,\cdots,n$$

$$P(X_i=1,X_j=1)=M(M-1)/N(N-1)$$

$$\begin{aligned}P(X_i=1,X_j=0)&=P(X_i=0,X_j=1)\\&=M(N-M)/N(N-1)\end{aligned}$$

$$P(X_i=0,X_j=0)=(N-M)(N-M-1)/N(N-1)$$

当 $i\neq j$. 由此就不难算出 $E(X)=nM/N$ 及$E(X^2)$把 $X^2=(X_1+\cdots+X_n)^2$ 展开),从而算出 $\mathrm{Var}(X)=\frac{N-nM}{N-1N}\left(1-\frac{M}{N}\right)n$.

4. 在不放回时,n 种情况(用 1 把,2 把,$\cdots$,n 把)都是等可能,即 $P(X=i)=1/n, i=1,\cdots,n$. 故

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

如有放回,则 $X=$概率为 p 是 $1/n$ 的几何分布变量再加上 1. 按例 1.2,得 $E(x)=1+\frac{1-p}{p}=1+n-1=n$.

5. 作法与第 3 题相似(实际上,第 3 题为本题当 $a_i=0$ 或 1 时的特例). 但此处 X_i 的分布为

$$P(X_i=a_j)=1/N, j=1,\cdots,N, i=1,\cdots,n$$

当 $i\neq j$ 时,(X_i,X_j)联合分布为

$$P(X_i=a_u,X_i=a_v)=1/N(N-1)(u\neq v) \qquad (2)$$

由此易算出 $E(\bar{X})=a$. 为算 $\mathrm{Var}(\bar{X})$,要算 $E(X_1+\cdots+X_n)^2$. 有

$E(X_i^2) = \sum_{j=1}^{N} a_j^2/N$. 而由(2)有

$$E(X_iX_j) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{u\neq v} a_u a_v$$
$$= \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{u,v=1}^{N} a_u a_v - \sum_{k=1}^{N} a_k^2\right]$$
$$= \frac{1}{N(N-1)}\left[(na)^2 - \sum_{k=1}^{N} a_k^2\right]$$

再经过简单的整理,可得

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{N}(a_i - a)^2$$

6. 分析 X 的构成,它等于 $X_1 + \cdots + X_r$,其中 X_i 是已登记了 $i-1$ 个不同数字的情况下,再抽到一个未登记的数字所需要抽的次数,显然,$X_1 = 1$,对 $i > 1$,X_i = 一个概率 p 为 $1 - \frac{i-1}{n}$ 的几何分布变量加上1. 由此用例1.2算出 $E(X_i) = n/(n-i+1)$(此式对 $i = 1$ 也对),故 $E(X) = \sum_{i=1}^{r} n/(n-i+1)$.

7.(a)用全概率公式算 $p_k(r+1,n)$:先把 r 个球随机放入 n 盒. 如恰有 k 个空盒(概率为 $p_k(r,n)$),则剩下一球必须落在已有球的盒子(共 $n-k$ 个)中,其概率为$(n-k)/n$;或者恰有 $k+1$ 个空盒(概率为 $p_{k+1}(r,n)$),则剩下一球必须落在无球的盒子里,其概率为$(k+1)/n$. 由此得题中之(1)式.

(b)把题中的(1)式两边乘以 k,再对 $k=0,1,\cdots,n-1$,相加,在化简右边时注意.

$$\sum_{k=0}^{n-1} kp_{k+1}(r,n)(k+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 p_{k+1}(r,n)$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p_{k+1}(r,n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k(r,n) - \sum_{k=1}^{n} k p_k(r,n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 p_k(r,n) - \sum_{k=0}^{n-1} k p_k(r,n)$$

这样即得出右边之和为$\left(1-\frac{1}{n}\right)m_r$, $m_0 = n$ 显然,因为,不投球时空盒数为 n.

8. 要定出 C,使 $C\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-n}\mathrm{d}x = 1$. 令 $N = 2n-1$,上式化为 $C\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-(N+1)/2}\mathrm{d}x = 1$. 令 $x = y/\sqrt{N}$. 上式化为 $\frac{C}{\sqrt{N}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{N}\right)^{-(N+1)/2}\mathrm{d}y = 1$. 与自由度为 N 的 t 分布密度比较,即得 $\frac{C}{\sqrt{N}} = \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)\Big/\left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\sqrt{N\pi}\right)$. 故

$$C = \Gamma(n)\Big/\left(\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\right)$$

此密度关于 0 对称,故其均值为 0, 方差为 $C\int_{-\infty}^{\infty}x^2(1+x^2)^{-n}\mathrm{d}x = 2C\int_{0}^{\infty}x^2(1+x^2)^{-n}\mathrm{d}x$. 这个积分经变数代换 $t = 1/(1+x^2)$ ($x = \sqrt{(1-t)/t}$) 可化为 β 积分.

9. 由第二章 22 题可知 Y_1 的密度函数为 $2\Phi(x)\varphi(x)$,这里 Φ,φ 分别是 $N(0,1)$ 的分布和密度函数,故

$$\begin{aligned}
E(Y_1) &= 2\int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= 2\iint_{\{y<x\}} x\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\iint_{\{y<x\}} xe^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

积分区域在图 4 中直线 l 的下方,化成极坐标后,有

$$\iint_{\{y<x\}} x e^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\infty} r^2 \mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{d}r = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{2\pi}\ /2) = \sqrt{\pi}$$

因而得 $E(Y_1)=1/\sqrt{\pi}$. 由于 $Y_1+Y_2=X_1+X_2$，知 $E(Y_2)=-E(Y_1)=-1/\sqrt{\pi}$.

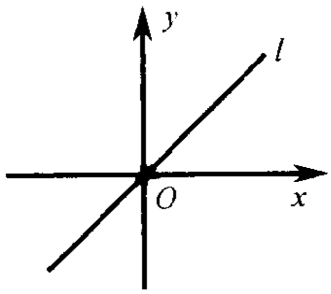

图 4

10. 卡方分布的方差为其均值的 2 倍，故若 X_1 和 X_2 分别服从卡方分布 χ_m^2 和 χ_n^2，则因 X_1,X_2 独立，将有

$$E(X_1+bX_2) = m+bn, \mathrm{Var}(X_1+bX_2) = 2m+2b^2n$$

要后一值为前者的 2 倍，只有在 $b=0$ 或 1 时才行.

11. 化为极坐标，则 Z 与 r 无关而只是 θ 的函数，再利用第二章例 3.6 中得出的 $\theta\sim R(0,2\pi)$.

12. 先设 F 有密度 f，则 $F(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$（因 X 只取非负值，$f(y)=0$，当 $y<0$）. 故

$$\int_0^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(y)\mathrm{d}y - \int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\left[\int_0^y \mathrm{d}x\right]f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\infty}yf(y)\mathrm{d}y = E(X)$$

若 $P(X=k)=p_k, k=0,1,2,\cdots$，则当 $i<x<i+1$ 时. 有 $F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0,1,\cdots,i)=\sum_{j=0}^{i}p_j$. 故 $1-F(x)=\sum_{j=i+1}^{\infty}p_j$. 因此

$$\int_0^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty}\int_i^{i+1}[1-F(x)]\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}p_j$$

$$=(p_1+p_2+\cdots)+(p_2+p_3+\cdots)+(p_3+\cdots)+\cdots$$

$$=p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3+\cdots = E(X)$$

13. 证明要用到重要的施瓦茨不等式

$$E(X^2)E(Y^2) \geqslant (E(XY))^2 \tag{3}$$

此实际上在定理 3.1 的 2°中已证明了：只须把(3.3)式中的 m_1，m_2 改为 0，则(3.4)式即成为此处的(3)式. 等号成立的条件为 X，Y 有线性关系，即存在常数 c，使 $Y = cX$ 或 $X = cY$.

现把(3)式用于 $X = \sqrt{X_2}$，$Y = 1/\sqrt{X_2}$，即得 $E\left(\frac{1}{X_2}\right) \geqslant \frac{1}{E(X_2)}$. 等号当且仅当有常数 c，使 $\sqrt{X_2} = c/\sqrt{X_2}$，即 $X_2 =$ 常数 c. 现因 X_1, X_2 独立知 $X_1, 1/X_2$ 独立，故

$$E(X_1/X_2) = E(X_1)E(1/X_2) \geqslant E(X_1)/E(X_2) = 1$$

(因为 $E(X_1) = E(X_2)$)等号只在 X_1, X_2 皆只取一个常数 c 为值时成立.

14. 令 $Y_i = X_i/(X_1 + \cdots + X_n)$，$i = 1, \cdots, n$. 则因 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，易知 $Y_1, \cdots, Y_n$ 同分布（不独立）. 故 $E(Y_1) = E(Y_2) = \cdots = E(Y_n)$. 但 $Y_1 + \cdots + Y_n = 1$，故 $E(Y_i) = 1/n$.

15. 把次数 X 记为 $X_1 + \cdots + X_n$，$X_i = 1$ 或 0，视第 i 次试验中 A 发生与否而定. 则对两串试验而言，$X_1, \cdots, X_n$ 都独立，而分布为

第一串：$P(X_i = 1) = p$，$P(X_i = 0) = 1 - p$

第二串：$P(X_i = 1) = p_i$，$P(X_i = 0) = 1 - p_i$

对第一串有 $E(X) = p_1 + \cdots + p_n = np$，对第二串也有 $E(X) = np$，二者同，对方差而言，则

第一串：为 $\sigma_1^2 = np(1 - p)$

第二串：为 $\sigma_2^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$

有

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 - np^2 = \sum_{i=1}^{n} (p_i - p)^2 \geqslant 0$$

等号当且仅当 $p_1 = \cdots = p_n = p$ 时成立.

直观上看这结果的解释如下:如果 $p_1+\cdots+p_n=np$ 而 $p_1,\cdots p_n$ 不相同而较分散,则其中会有一些比 p 更接近 0 或 1.而这导致方差的降低,因为,$p_i(1-p_i)$ 当 $p_i\approx 0$ 或 1 时很小.

16. 因 $0\leqslant X\leqslant 1$,故 $0\leqslant E(X)\leqslant 1$,以及 $X^2\leqslant X$.故

$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)\leqslant E(X)-E^2(X)=EX(1-EX)$

但函数 $x(1-x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内不超过 1/4,而 $0\leqslant EX\leqslant 1$,故证明了 $\mathrm{Var}(X)\leqslant 1/4$.

从上面推理可知,为要成立等号,有两个条件要满足:$X^2=X$,$EX=1/2$.前一条件决定了 X 只能取 0,1 为值.后一条件决定了 $P(X=0)=P(X=1)=1/2$.这是唯一达到等号的情况.

对一般情况 $a\leqslant X\leqslant b$,可令 $Y=(X-a)/(b-a)$.则 $0\leqslant Y\leqslant 1$ 因而 $\mathrm{Var}(Y)\leqslant 1/4$.但 $\mathrm{Var}(X)=(b-a)^2\mathrm{Var}(Y)$,故有 $\mathrm{Var}(X)\leqslant(b-a)^2/4$.等号只在下述情况成立:$P(X=a)=P(X=b)=1/2$.

17. 分别以 X,Y 记二人到达的时间,则等的时间为 $|X-Y|$.而平均等待时间为

$$\int_0^{60}\int_0^{60}|x-y|/3600\mathrm{d}x\mathrm{d}y=20(\text{分钟})$$

18. 在计算 $\int_0^{\infty}|x-m|f(x)\mathrm{d}x$ 时分为 $\int_0^{m}(m-x)f(x)\mathrm{d}x+\int_m^{\infty}(x-m)f(x)\mathrm{d}x$.

19. 任取 $a\neq m$.例如 $a<m$,则

$$\begin{aligned}&E|X-a|-E|X-m|\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[|x-a|-|x-m|]f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{m}[|x-a|-|x-m|]f(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_m^{\infty}[|x-a|-|x-m|]f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在 $-\infty<x\leqslant m$ 内有 $|x-a|-|x-m|\geqslant -m-a$.故

第一积分 $\geqslant -(m-a)\int_{-\infty}^{m} f(x)\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{2}(m-a)$($m$ 的定义!)而在 $m<x<\infty$ 内有 $|x-a|-|x-m|=(m-a)$,故

$$\text{第二积分}=(m-a)\int_{m}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(m-a)$$

二者相加,得 $E|X-a|-E|X-m|\geqslant 0$. 对 $a>m$ 的情况也类似处理(请读者完成).

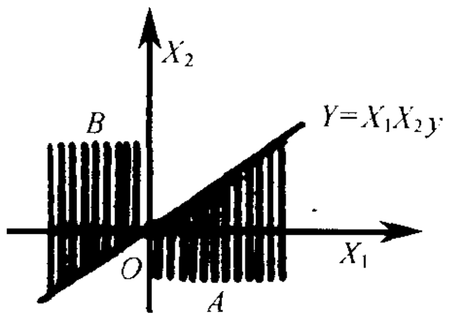

图 5

21. 计算 $Y=X_1X_2$ 的分布函数 $F(y)=P(Y\leqslant y)$. 事件 $\{Y\leqslant y\}$ 相应于 (X_1,X_2) 落在图 5 中的区域 A 或 B 内. 因此有

$$F(y)=\iint_A f(x_1)g(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+\iint_B f(x_1)g(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

固定 x_1 先对 x_2 积分,得

$$F(y)=\int_0^{\infty} f(x_1)\left[\int_{-\infty}^{y/x_1} g(x_2)\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1+\int_{-\infty}^{0} f(x_1)\left[\int_{y/x_1}^{\infty} g(x_2)\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1$$

两边对 y 求导,得 Y 的密度函数 $h(y)$ 为

$$h(y)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x_1}f(x_1)g\left(\frac{y}{x_1}\right)\mathrm{d}x_1-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x_1}f(x_1)g\left(\frac{y}{x_1}\right)\mathrm{d}x_1$$

计算 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)\mathrm{d}y$. 注意当 $x_1>0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} yg\left(\frac{y}{x_1}\right)\mathrm{d}y=x_1^2\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)\mathrm{d}y=x_1^2E(X_2)$$

而当 $x_1<0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} yg\left(\frac{y}{x_1}\right)\mathrm{d}y=-x_1^2\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)\mathrm{d}y=-x_1^2E(X_2)$$

因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,h(y)\mathrm{d}y = E(X_2)\left(\int_0^{\infty} x_1 f(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_{-\infty}^{0} x_1 f(x_1)\mathrm{d}x_1\right) = E(X_2)E(X_1)$$