习　题

1. 计算对数正态分布的均值和方差(对数正态分布见第二章习题 19).

2. 计算均匀分布 $R(a,b)$的峰度系数.

3. 计算超几何分布的均值和方差.

4. 一人有 N 把钥匙,每次开门时,他随机地拿出一把(只有一把钥匙能打开这道门),直到门打开为止. 以 X 记到此时为止用的钥匙数(包括最后拿对的那一把). 按以下两种情况分别计算 $E(X)$:(a)试过不行的不再放回去. (b)试过不行的仍放回去.

---

* 一般 $\Phi(x)$的表上只列出当 $\Phi(x)\geqslant 1/2$ 时,x 之值. 若 $\Phi(x)<1/2$,则须先由公式 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)(>1/2)$查出 $-x$ 再得出 x. 有的表列出的是由 $2(1-\Phi(x))$之值求 $x(x>0)$. 这时对本例而言. 应先由 $2(1-\Phi(y))=0.2$,定出 y,再取 $x=-y$ 即得.

5. 某县有 N 农户，其年收入分别为 $a_1,\cdots,a_N$. 为估计平均收入 $a=(a_1+\cdots+a_N)/N$，随机不放回地抽出 n 农户 $(1\leqslant n\leqslant N)$，以 $X_1,\cdots,X_n$ 记所抽出的 n 农户的年收入，而以 $\bar{X}=(X_1+\cdots+X_n)/n$ 去估计 a. 计算 $E(\bar{X})$ 和 $\mathrm{Var}(\bar{X})$.

6. 一盒中有 n 个不同的球，其上分别写数字 $1,2,\cdots,n$. 每次随机抽出 1 个，登记其号码，放回去，再抽，一直抽到登记有 r 个不同的数字为止. 以 X 记到这时为止的抽球次数，计算 $E(X)$.

7. 把 r 个球随机地放入 n 个盒子中，以 X 记空盒个数，计算 $E(X)$. 此题如直接从计算 $P(X=k)$ 出发很难，但用下述步骤可以解决.

(a) 以 $p_k(r,n)$ 记 r 个球随机放入 n 盒恰有 k 个空盒的概率，用全概率公式证明：

$$p_k(r+1,n)=p_k(r,n)\frac{n-k}{n}+p_{k+1}(r,n)\frac{k+1}{n} \tag{1}$$

(b) 以 m_r 记题中要计算的均值 $E(X)$. 由(a)中得出的公式(1)两边乘 k 对 k 求和，证明

$$m_{r+1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)m_r,\quad r=0,1,2,\cdots$$

再由 $m_0=n$ 即得 $m_r=n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^r$.

8. 设 n 为自然数，$f(x)=C/(1+x^2)^n$，找常数 C，使 $f(x)$ 为概率密度函数，并计算其均值方差.

9. 设 X_1,X_2 独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$. 记 $Y_1=\max(X_1,X_2)$，$Y_2=\min(X_1,X_2)$. 计算 $E(Y_1),E(Y_2)$.

10. 设 X_1,X_2 独立，都服从卡方分布，而常数 b 非 0 非 1，则 X_1+bX_2 决不服从卡方分布.

11. 设 X,Y 独立，都服从标准正态分布，而 $Z=(aX^2+bY^2)/(X^2+Y^2)$，其中 a,b 为常数. 计算 $E(Z)$ 和 $\mathrm{Var}(Z)$.

12. 设随机变量 X 只取非负值，其分布函数为 $F(x)$，证明：在以下两种情况都有

$$E(X)=\int_0^\infty[1-F(x)]\mathrm{d}x \tag{2}$$

(a) X 有概率密度函数 $f(x)$.

(b) X 为离散型，有分布 $P(X=k)=p_k,k=0,1,2,\cdots$

注：公式(2)对任何非负随机变量都对，并不限于(a)，(b)两种情况. 但证

明超出初等方法之外.

13. 设 X_1,X_2 独立同分布,都只取正值,则必有 $E(X_1/X_2)\geqslant 1$,等号当且仅当 X_1,X_2 只取一个值时成立.

注:按此题结论,也有 $E(X_2/X_1)\geqslant 1$(X_1,X_2 地位平等),故 $E(X_1/X_2)E(X_2/X_1)\geqslant 1$,但$(X_1/X_2)(X_2/X_1)\equiv 1$.

14. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布,都只取正值.证明:

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{1}{n}$$

15. 设 $p_1,\cdots,p_n$ 都界于 0,1 之间,记 p 为它们的算术平均.作两串独立试验,每串各 n 次,在第一串中,事件 A 在各次试验中发生的概率,依次为 $p_1,\cdots,p_n$.在第二串中,事件 A 在各次试验中发生的概率始终保持为 p.以 Y_1 和 Y_2 分别记在第一串和第二串试验中事件 A 发生的总次数.证明 Y_1,Y_2 有相同均值,而 $\mathrm{Var}(Y_1)\geqslant\mathrm{Var}(Y_2)$,等号当且仅当 $p_1=\cdots=p_n=p$ 时成立.试给这后一结论以一直观的解释.

16. 设随机变量 X 只取$[0,1]$上的值.证明 $\mathrm{Var}(x)\leqslant 1/4$.指出等号达到的情况,把这结果推广到 X 只取$[a,b]$上的值的情况.

17. 在第一章例 1.2 中,若先到的人必等到后到的人来了为止,问先到的人平均要等多久?

18. 设 X 服从指数分布,试计算其中位数 m 以及$E|X-m|$.

19. 设 X 有概率密度函数$f(x)$.令 $h(a)=E|X-a|$.证明:当 a 等于 X 的中位数m 时,$h(a)$达到最小(这是中位数一个重要性质).

20. 解第二章 27 题,用如下的方法:找 b,使 $X+bY$ 和$X-bY$ 的相关系数为 0.这比用第二章的方法简单得多.

21. 设 X_1,X_2 独立,分别有概率密度函数 $f(x_1)$和 $g(x_2)$.试求 $Y=X_1X_2$ 的密度函数,并用所得结果证明

$$E(Y)=E(X_1)E(X_2)$$