2.(a)只须注意:若 $c_1<c_2$,则 $g(a)=|c_1-a|+|c_2-a|$ 当且仅当 $c_1\leqslant a\leqslant c_2$ 时达到最小值 c_2-c_1. 故如把 $a_1,\cdots,a_n$ 按由小到大排列为 $a_{(1)}\leqslant a_{(2)}\cdots\leqslant a_{(n)}$,则将 $h(a)$ 写为 $\sum_{i=1}^{n}|a_{(i)}-a|=(|a_{(1)}-a|+|a_{(n)}-a|)+(|a_{(2)}-a|+|a_{(n-1)}-a|)+\cdots$后,可以看出:为使此式达到最小,$a$ 必须落在下述这些区间的每一个之内:$[a_{(1)},a_{(n)}]$,$[a_{(2)},a_{(n-1)}]$,$[a_{(3)},a_{(n-2)}]$,$\cdots$. 如 n 为奇数,适合这条件的唯一的 a 是 $a_{(n+1)/2}$. 如 n 为偶数,则$[a_{(n/2)},a_{(n/2+1)}]$中任一数 a 都适合这条件. 不论在何情况,样本中位数总在其列.

(b)极大似然估计直接由(a)得出,为样本中位数,矩估计为 $\bar{X}$.

3. 总体均值为 $3\theta/2$,故矩估计为 $2\bar{X}/3$. 样本$(X_1,\cdots,X_n)$的似然函数为

$$f(x_1,\cdots,X_n,\theta)=\begin{cases}\theta^{-n}, & \text{当 } \theta\leqslant\min(X_i)\leqslant\max(X_i)\leqslant 2\theta\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

可看出极大似然估计为$\frac{1}{2}\max(X_1,\cdots,X_n)$.

4. 因为积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(x-a)^2\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)\mathrm{d}x$$

是 $N(a,\sigma^2)$的方差,为 σ^2,故立即看出 $f(x;a,\sigma)$为概率密度函数. 由对称性知此分布均值为 a,故 a 的矩估计为 $\bar{X}$. 此分布的方差为 $3\sigma^2$,故得 σ^2 的矩估计为$\frac{1}{3(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

取似然函数的对数,分别对 a 和 σ 求偏导数,得到决定极大似然估计的方程组

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i-a}-\frac{n}{\sigma^2}(\bar{X}-a)=0 \tag{1}$$

$$\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2 \tag{2}$$

一个叠代解法是:先给定 a 的初始值 a_0(例如 $a_0=\bar{X}$,但必须 $\bar{X}\neq X_i$ 对任何 i),由(1)式解出 σ^2 之值 σ_0^2. 以 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 代入(2)式解出 a 的下一个值 a_1(这是一个 a 的二次方程),以 $a=a_1$ 代入(1)解出 σ^2 的下一个值 σ_1^2. 继续下去直到 (a_n,σ_n^2) 与 (a_{n+1},σ_{n+1}^2) 之差别小于指定界限为止.

5. 先算出

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^X/X!\,\mathrm{d}\lambda=1/2^{X+1},X=0,1,2,\cdots.$$

即知 λ 的后验密度为 $2^{X+1}\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^X/X!$. 其均值,即 $(X+1)/2$,为 λ 的贝叶斯估计.

λ 的 MVU 估计为 X. 当 X 取大值(具体说,$X\geqslant 2$)时,它大于贝叶斯估计 $(X+1)/2$. 请解释一下其原因.

6. 先算出样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的边缘密度

$$\int_0^{\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n\mathrm{e}^{-n\lambda\bar{X}}\mathrm{d}\lambda=(n+1)!/(1+n\bar{X})^{n+2}$$

由此算出 λ 的后验密度的均值为

$$\{(1+n\bar{X})^{n+2}/(n+1)!\}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n+2}\mathrm{e}^{-n\lambda\bar{X}}\mathrm{d}\lambda$$
$$=(n+2)/(1+n\bar{X})$$

这就是 λ 的贝叶斯估计. 你对这个估计与通常估计 $\bar{X}$ 比较,有何评述?

7.(a)考虑 $N+1$ 个球,自左至右排成一列,如图 6. 现要从其中拿出 $n+1$ 个,拿法有 $\binom{N+1}{n+1}$ 种. 将拿法作如下的分解:固定列

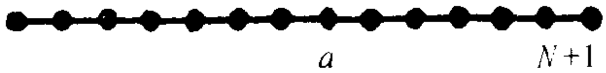

图 6

中的第 $m+1$ 个球 a. 将 a 拿出, 并在 a 左边拿出 x 个 $\left(\text{拿法有}\binom{m}{x}\text{种}\right)$, 在 a 右边拿出 $n-x$ 个 $\left(\text{拿法有}\binom{N-m}{n-x}\text{种}\right)$. 因此这样的拿法有 $\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}$ 种. 再让 a 由位置 1 流动到 $N+1$(m 由 0 到 N). 所得出的拿法显然无相重的并无遗漏的. 由此得出所给的组合等式.

(b)在所给先验分布之下, X 的边缘分布为

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_{k=0}^{N} P(M=k)P_k(X=x) \\
&= \left[(N+1)\binom{N}{n}\right]^{-1}\sum_{k=0}^{N}\binom{k}{x}\binom{M-k}{n-x} \\
&= \left[(N+1)\binom{N}{n}\right]^{-1}\binom{N+1}{n+1} = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$x=0,1,\cdots,n$. 如此得到 M 的后验分布为

$$
P(M=m\mid X)=\frac{n+1}{N+1}\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}\Big/\binom{N}{n}
$$

$$
m=0,1,\cdots,N
$$

此分布之均值, 即

$$
\hat{\theta}(X)=\frac{n+1}{N+1}\sum_{m=0}^{N} m\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}\Big/\binom{N}{n} \tag{3}
$$

为 M 的贝叶斯估计. 上式中的和等于

$$
\sum_{m=0}^{N}(m+1)\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}-\sum_{m=0}^{N}\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x} \tag{4}
$$

第一项可化为$(x+1)\binom{m+1}{x+1}\binom{N+1-(m+1)}{n+1-(x+1)}$. 因此，由$(a)$中证明的组合公式，(4)中的两个和，分别等于$\binom{N+2}{n+2}(x+1)$和$\binom{N+1}{n+1}$. 以此代入(3)式并化简，即得所要的结果.

8. 考虑先验密度 $p^a(1-p)^b$(可以是广义的). 得到贝叶斯估计为$(x+a+1)/(n+a+b+2)$，取 $a=c-1, b=d-c-1$ 即可.

9. (a)$X(X-1)/[n(n-1)]$. (b)若$\hat{p}(X)$为 $g(p)$的无偏估计，则

$$g(p)=E_p\hat{p}(x)=\sum_{i=0}^{n}\hat{p}(i)\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

而右边为 p 的不超过n 阶的多项式. 由此可知，像e^{-p}, $1/(1+p^2)$等，都没有无偏估计. 还有一个有趣的事实：令 $g_1(p)=p$, $g_2(p)=p^n$, $g_3(p)=p^{n+1}$，则 $g_1(p)$, $g_2(p)$都有无偏估计(见(c))，但 $g_1(p)\cdot g_2(p)=g_2(p)$则没有. (c)只须证明：对任何自然数 $k\leqslant n$, p^k 有无偏估计. 直接验证：p^k 的无偏估计就是$X(X-1)\cdots(X-k+1)/[n(n-1)\cdots(n-k+1)]$:

$$\begin{aligned}
&E[X(X-1)\cdots(X-k+1)/n(n-1)\cdots(n-k+1)]\\
&=\sum_{i=0}^{n}[i(i-1)\cdots(i-k+1)/n(n-1)\cdots(n-k+1)]\\
&\quad\cdot\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\\
&=\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i}\\
&=p^k\sum_{i=0}^{n}\binom{n+k}{i-k}p^{i-k}(1-p)^{n-i}
\end{aligned}$$

令 $n-k=m$, $i-k=j$，上式成为 $p^k\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j}=p^k$.

10. 依第二章23题，$\min(X_1,\cdots,X_n)$与 $\theta-\max(X_1,\cdots,X_n)$

同分布. 因此二者之均值相同, 由此得

$$E[\min(X_1,\cdots,X_n)+\max(X_1,\cdots,X_n)]=\theta$$

这证明了(a). 又由第二章 22 题知 $\min(X_1,\cdots,X_n)$的概率密度为 $\frac{1}{\theta}n\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}$(当 $0<x<\theta$, 此外为 0), 其均值为 $\theta/(n+1)$. 由此可知, 令 $C_n=n+1$, 则 $C_n\min(X_1,\cdots,X_n)$为 θ 的无偏估计. 这证明了(b). 为证(c), 只须算出 $\mathrm{Var}(C_n\min(X_1,\cdots,X_n))=(n+1)^2\frac{n}{\theta}\int_0^\theta x^2\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\mathrm{d}x-\theta^2=n\theta^2/(n+2)$. 与例 3.5 比较即得(问: 由 $C_n\min(X_1,\cdots,X_n)$的方差表达式看出这个估计之不合理处, 在什么地方? ——n 愈大, 其方差非但不下降, 反而上升, 即样本愈多, 估计误差愈大了).

11. (a)有

$$E[\hat{\theta}(x)]=\sum_{i=0}^{\infty}\hat{\theta}(i)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{i!}\lambda^i=\mathrm{e}^{-2\lambda}$$

得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\hat{\theta}(i)\frac{\lambda^i}{i!}=\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i}{i!}, \text{因此} \hat{\theta}(i)=(-1)^i$$

这估计之不合理显然, 一个合理的估计可取为 e^{-2x}.

12. 利用 $E(\chi_n^2)=n$, $\mathrm{Var}(\chi_n^2)=2n$. 由于 $(n-1)\hat{\theta}_1/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$, 知

$$\begin{aligned}E[\hat{\theta}_1-\sigma^2]^2&=(n-1)^{-2}\sigma^4E[(n-1)\hat{\theta}_1/\sigma^2-(n-1)]^2\\&=(n-1)^{-2}\sigma^4\mathrm{Var}(\chi_{n-1}^2)=2\sigma^4/(n-1)\end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}E\left(\frac{n-1}{n+1}\hat{\theta}-\sigma^2\right)^2&=\left(E\left(\frac{n-1}{n+1}\hat{\theta}\right)-\sigma^2\right)^2+\mathrm{Var}\left(\frac{n-1}{n+1}\hat{\theta}\right)\\&=\left(\frac{2}{n+1}\right)^2\sigma^4+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)\\&=\left(\frac{2}{n+1}\right)^2\sigma^4+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\frac{2}{n-1}\sigma^4=\frac{2}{n+1}\sigma^4\end{aligned}$$

由此得出要证的结果.

13. 与 12 题一样,用 $\mathrm{Var}(\chi_n^2)=2n$,有

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3) = \frac{\sigma^4}{n^2}\mathrm{Var}(\chi_n^2) = \frac{2}{n}\sigma^4 < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)$$

这证明了(a). 为证(b),要用克拉美-劳不等式,以 σ^2 作 θ,$g(\theta)=\theta$. 算出

$$I(\sigma^2) = E\left[\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}(X-a)^2\right]^2 = 1/(2\sigma^4)$$

于是 σ^2 的无偏估计之方差下界为

$$1/(nI(\sigma^2)) = 2\sigma^4/n$$

与 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)$相同. 由此证明了所要的结果.

注:若令 $\hat{\theta}_4 = \dfrac{1}{n+2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$. 由 12 题的证法,$\hat{\theta}_4$ 的均方误差为 $2\sigma^4/(n+2)$,比 $\hat{\theta}_3$ 的均方误差(即 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)$) 小. 由此例可知,MVU 估计的均方误差不一定是最小的.

14. (a)因为作变换 $x=\sqrt{y/\theta}$可得

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\theta x^2}dx = \theta^{-3/2}\int_0^\infty y^{1/2}e^{-y}/2dy$$

$$= \frac{1}{2}\theta^{-3/2}\Gamma(3/2) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\theta^{-3/2}$$

即知 $E(X_i^2)=\frac{1}{2\theta}$. 故令 $C=2$ 即可. 其次,算出

$$\mathrm{Var}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) = \frac{4}{n}\mathrm{Var}(X_1^2) = 2/(n\theta^2)$$

再用克拉美-劳不等式,先算出

$$I(\theta) = E\left[\frac{1}{2\theta} - X^2\right]^2 = 1/(2\theta^2)$$

而 $g(\theta)=1/\theta$,故 $g'(\theta)=-1/\theta^2$ 而

$$(g'(\theta))^2/nI(\theta) = \theta^{-4}\Big/\left(\frac{1}{2}n\theta^{-2}\right) = 2/(n\theta^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$$

于是证明了所要的结果.

15.(a)用第三章定理 3.1,2°,有

$$\operatorname{Var}\left(\frac{\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2}{2}\right)=E\left[\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1-\theta)+\frac{1}{2}(\hat{\theta}_2-\theta)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}[E(\hat{\theta}_1-\theta)^2+E(\hat{\theta}_2-\theta)^2]+\frac{1}{2}E[(\hat{\theta}_1-\theta)(\hat{\theta}_2-\theta)]$$

$$\leqslant\frac{1}{4}[E(\hat{\theta}_1-\theta)^2+E(\hat{\theta}_2-\theta)^2]+\frac{1}{2}[E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$$

$$\cdot E(\hat{\theta}_2-\theta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

由于$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的 MVU 估计,其方差相同且都达到最小值 $c(\theta)$.由上式得

$$\operatorname{Var}\left(\frac{\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{4}[c(\theta)+c(\theta)]+\frac{1}{2}c(\theta)=c(\theta)$$

即无偏估计$(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)/2$ 的方差不大于最小值 $c(\theta)$,因而它必为 MVU 估计.

(b)用反证法,若 $a\hat{\theta}+b$ 不为$a\theta+b$ 的 MVU 估计,则可以找到 $a\theta+b$ 的一个无偏估计$\hat{\theta}_1$,使

$$\operatorname{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta}_1)<\operatorname{Var}_{\theta_0}(a\hat{\theta}+b)=a^2\operatorname{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta})$$

至少对一个 θ 值θ_0.令$\hat{\theta}_2=(\hat{\theta}_1-b)/a$,则$\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计,且

$$\operatorname{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{a^2}\operatorname{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta}_1)<\frac{1}{a^2}a^2\operatorname{Var}_{\theta_0}(\theta)=\operatorname{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta})$$

即无偏估计$\hat{\theta}_2$ 的方差,当 $\theta=\theta_0$ 时比无偏估计$\hat{\theta}$的方差还小.这与$\hat{\theta}$的是θ 的 MVU 估计矛盾.

16. $E\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)=\theta\sum_{i=1}^{n}c_i=\theta$,故$\sum_{i=1}^{k}c_iX_i$ 为无偏估计, 其方差为($\sigma^2=\operatorname{Var}(X_i)$)

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2\operatorname{Var}(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{k}c_i^2$$

$$= \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n}(c_i - 1/n)^2 + 1/n\right] \geqslant \sigma^2/n$$

等号当且仅当 $c_1 = \cdots = c_n = 1/n$ 时才成立.

17. 因为 $\max(X_1, \cdots, X_n)$(记为 $\hat{\theta}$)的密度函数为 nx^{n-1}/θ^n(当 $0 < x < \theta$,此外为 0).故

$$P_\theta(\hat{\theta} \leqslant \theta \leqslant c_n\hat{\theta}) = P_\theta(\theta/c_n \leqslant \hat{\theta} \leqslant \theta)$$
$$= \int_{\theta/cn}^{\theta} nx^{n-1}\mathrm{d}x/\theta^n = (\theta^n - (\theta/c_n)^n)/\theta^n = 1 - c_n^{-n}$$

要此值等于 $1-\alpha$,只须取 $c_n = \left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)^{1/n}$.

18. (a)只要 $c + d = 1$,则 $c\bar{X} + d\bar{Y}$ 为 θ 的无偏估计,其方差为 $c^2\sigma_1^2/n + d^2\sigma_2^2/m$.把此式在 $c + d = 1$ 的约束下求最小值,结果为

$$c = (\sigma_2^2/m)/(\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m), d = (\sigma_1^2/n)/(\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m)$$

对这个 c, d 有

$$(c\bar{X} + d\bar{Y} - \theta)/A \sim N(0,1)$$

其中 $A^2 = (\sigma_1^2/n \cdot \sigma_2^2/m)/(\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m)$.于是得到 θ 的置信系数 $1-\alpha$ 的区间估计为 $c\bar{X} + d\bar{Y} \pm Au_{\alpha/2}$.

19. 考虑

$$2\lambda_1 n\bar{X} / 2\lambda_2 m\bar{Y} = Z$$

分子分母独立,分别服从卡方分布 χ_{2n}^2 和 χ_{2m}^2.故

$$P\left(F_{2n,2m}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{\lambda_1\bar{X}}{\lambda_2\bar{Y}} \leqslant F_{2n,2m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

此式可改写为

$$P\left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}/F_{2n,2m}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leqslant \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}/F_{2n,2m}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

即得 λ_2/λ_1 的置信区间.

20. (θ, X_1, X_2) 的联合分布密度为

$$f(\theta, X_1, X_2) = \mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{e}^{\theta - x_1}\mathrm{e}^{\theta - x_2}, 0 < \theta \leqslant \min(X_1, X_2)$$

由此得出 (X_1, X_2) 的边缘密度为 $\int_0^{\min(X_1,X_2)} e^{\theta} d\theta e^{-(X_1+X_2)} = e^{-(X_1+X_2)}[e^{\min(X_1,X_2)}-1]$，而 θ 的后验密度为

$$h(\theta \mid X_1, X_2) = e^{\theta}/[e^{\min(X_1,X_2)}-1], 0 < \theta \leqslant \min(X_1, X_2)$$

此外为 0. 这密度在上述区间内随 θ 上升而上升. 故要找一个最短的区间 $[a,b]$ 使 $\int_a^b h(\theta \mid X_1, X_2) d\theta = 1-\alpha$，$b$ 必须取为 $\min(X_1, X_2)$. 因

$$\int_a^{\min(X_1,X_2)} e^{\theta} d\theta = e^{\min(X_1,X_2)} - e^a$$

知 a 必须取为 $\log[\alpha e^{\min(X_1,X_2)} + 1 - \alpha]$.

21. 由 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，从卡方分布密度的形式，不难算出 S/σ 的密度函数 $g(s)$ 为：$g(s)=0$ 当 $s \leqslant 0$，而

$$g(s) = \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{2^{(n-3)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{(n-1)/s^2}{2}} S^{n-2}, s > 0$$

为计算 $E(S) = \sigma \int_0^{\infty} sg(s) ds$，只须在积分

$$\int_0^{\infty} s^{n-1} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2}\right) ds$$

中作变数代换 $t = (n-1)s^2/2$ 以化为 Γ 积分即可.

22. 作代换 $Y_i = (X_i - \theta_1)/(\theta_2 - \theta_1), i = 1, \cdots n$. 则 $Y_1, \cdots, Y_n$ 独立同分布，其公共分布为 $[0,1]$ 上的均匀分布 $R(0,1)$，与 θ_1, θ_2 无关. 故 $E(S_Y) = E\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2/(n-1)}$ 也与 θ_1, θ_2 无关. 记为 d_n. 有 $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)} = (\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)S_Y$，故 $E(S) = d_n(\theta_2 - \theta_1)$. 现有

$$E(\bar{X} - c_n S) = (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/2 - c_n d_n(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$$

$$E(\bar{X} + c_n S) = (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/2 + c_n d_n(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$$

取 $C_n=1/(2d_n)$. 此两式分别成为$\hat{\theta}_1$ 和$\hat{\theta}_2$. 要求出 C_n,必须算出 $d_n=E(S_Y)$. 这不容易.

23. 设此结论不对,则存在 θ 的无偏估计 T_n,使对于(θ,σ^2)的某个值(θ_0,σ_0^2),有

$$\mathrm{Var}_{\theta_0,\sigma_0^2}(T_n) < \mathrm{Var}_{\theta_0,\sigma_0^2}(\bar{X}) = \sigma_0^2/n$$

把 $X_1,\cdots,X_n$ 看作为抽自正态总体$N(\theta,\sigma_0^2)$的样本,θ 未知而σ_0^2已知. 这时, $\bar{X}$ 和 T_n 仍然是θ 的无偏估计. 且因此处方差 σ_0^2 已知. $\bar{X}$ 是θ 的 MVU 估计. 因此对一切 θ 应有

$$\mathrm{Var}_{\theta,\sigma_0^2}(T_n) \geqslant \mathrm{Var}_{\theta,\sigma_0^2}(\bar{X}) = \sigma_0^2/n$$

令 $\theta=\theta_0$,即得到与前式矛盾的结果,这证明了 $\bar{X}$ 仍是θ 的 MVU 估计.