习　题

1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自负二项分布的样本，求 p 的矩估计与极大似然估计.

2. (a) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个实数，定义函数 $h(a)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-a|$.证明：当 a 为 $a_1,\cdots,a_n$ 的样本中位数(见 4.29)式)时，$h(a)$ 达到最小值. (b) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为自具概率密度函数 $\frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$ 中抽出的样本(这个分布叫拉普拉斯分布)，求参数 θ 的矩估计与极大似然估计.

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自均匀分布 $R(\theta,2\theta)$ 的样本，求 θ 的矩估计与极大似然估计.

4. (a) 证明

$$f(x;a,\sigma)=(\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1}(x-a)^2\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)$$

$$-\infty<x<\infty$$

作为 x 的函数是概率密度，其中 a,σ 为参数，$-\infty<a<\infty,\sigma>0$.

(b) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自此总体的样本，求 a 和 σ^2 的矩估计.

(c) 列出 a,σ^2 的极大似然估计所满足的方程，并指出一种叠代求解的方法.

5. 设 X 为抽自波哇松分布 $P(\lambda)$ 的样本(样本大小为 1)，参数 λ 有先验密度 $h(\lambda)=e^{-\lambda}$(当 $\lambda>0$. $h(\lambda)=0$ 当 $\lambda\leqslant0$). 试求 λ 的贝叶斯估计.

6. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自指数分布的样本. 分布中的参数 λ 有先验密度 $h(\lambda)=\lambda e^{-\lambda}$ 当 $\lambda>0$, $h(\lambda)=0$ 当 $\lambda\leqslant 0$. 求 λ 的贝叶斯估计.

7. (a) 设 N,n,m 都是自然数, $n\leqslant N$. 证明组合公式 $\left(\text{注意:}\binom{a}{b}=0 \text{ 当 } a<b\right)$

$$\sum_{m=0}^{N}\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}=\binom{N+1}{n+1}, x=0,1,\cdots,n$$

(b) 设 X 为抽自超几何分布

$$P_M(X=x)=\binom{m}{x}\binom{N-M}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$$

的样本, M 为未知参数, 其先验分布为

$$P(M=k)=1/(N+1), k=0,1,\cdots,N$$

试利用(a)的结果证明: M 的贝叶斯估计为

$$\hat{M}(x)=(N+2)(X+1)/(n+2)-1$$

8. 设 X 为抽自二项分布 $B(n,p)$ 的样本, n 已知, p 为未知参数. 证明: 对任何常数 $c,d,d>c>0$, 可找到 p 的先验分布(可以为广义的), 使 p 的贝叶斯估计为 $(X+c)/(n+d)$.

9. 设 X 为抽自二项分布 $B(n,p)$ 的样本, n 已知, 而 p 为未知参数. (a) 作 p^2 的一个无偏估计. (b) 证明: 若 $g(p)$ 有无偏估计存在, 则 $g(p)$ 必是 p 的不超过 n 阶的多项式. (c) 反过来, 对 p 的任一不超过 n 阶的多项式 $g(p)$, 它的无偏估计必存在.

10. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $R(0,\theta)$ 的样本. (a) 证明: $\hat{\theta}_1=\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个无偏估计. (b) 证明: 对适当选择的参数 c_n, $\hat{\theta}_2=c_n\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的无偏估计. 但这个估计的方差比另外两个无偏估计 $\hat{\theta}_3=\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_4=\dfrac{n+1}{n}\max(X_1,\cdots,X_n)$ 都大(除非 $n=1$).

11. 设 X 为抽自波哇松分布 $P(\lambda)$ 的样本. (a) 证明: $g(\lambda)=e^{-2\lambda}$ 的唯一的无偏估计 $\hat{\theta}(X)$ 为: $\hat{\theta}_1(X)=1$ 当 X 为偶数, $\hat{\theta}_1(X)=-1$ 当 X 为奇数. (b) 你认为(a)中的估计是否合理? 如不合理, 试提出一个合理的估计.

12. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自正态总体 $N(a,\sigma^2)$ 的样本, 则已知 $\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为 σ^2 之一无偏估计. 证明: $\hat{\theta}_2=\dfrac{n-1}{n+1}\hat{\theta}_1$ 虽非 σ^2 的无偏

估计,但$\hat{\theta}_2$ 的均方误差较小,即:$E(\hat{\theta}_2-\sigma^2)^2<E(\hat{\theta}_1-\sigma^2)^2$.本题及 11 题都说明:无偏估计不一定是最好的选择.

13. 设在 12 题中 a 已知.(a) 则$\hat{\theta}_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$也是 σ^2 的无偏估计.且其方差小于上题中的估计$\hat{\theta}_1$ 的方差.(b) 进一步证明:$\hat{\theta}_3$ 是 σ^2 的 MVU 估计.

14. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从具概率密度函数

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2\sqrt{\theta/\pi}\exp(-\theta x^2), & x>0\\ 0\quad, & x\leqslant 0\end{cases}$$

的总体中抽出的样本.证明:对适当选择的常数 C, $\hat{\theta}=C\sum_{i=1}^{n}X_i^2/n$ 是 $1/\theta$ 的 MVU 估计.

15. (a) 若$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的 MVU 估计,则$(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)/2$ 也是.(b) 若$\hat{\theta}$ 是 θ 的 MVU 估计而 $a\neq 0$ 和 b 都是已知常数,则 $a\hat{\theta}+b$ 是$a\theta+b$ 的 MVU 估计.

16. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为从某一个具均值θ 而方差有限的总体中抽出的样本.证明:对任何常数 $c_1,\cdots,c_n$,只要 $\sum_{i=1}^{n}c_n=1$,则$\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 必是 θ 的无偏估计.但是,只有在 $c_1=c_2=\cdots=c_n=1/n$ 时,方差达到最小(指在上述形式的估计类中达到最小.实际可以证明:$\overline{X}$在 θ 的一切无偏估计类中方差也达到最小).

17. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自均匀分布 $R(0,\theta)$中的样本.证明:对任给的 $1-\alpha(0<1-\alpha<1)$,可找到常数 c_n,使$[\max(X_1,\cdots,X_n),c_n\max(X_1,\cdots,X_n)]$为 θ 的一个置信系数 $1-\alpha$ 的区间估计.

18. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 分别是抽自正态总体$N(\theta,\sigma_1^2)$和 $N(\theta,\sigma_2^2)$的样本,σ_1^2 和 σ_2^2 都已知.(a) 找常数 c,d,使$\hat{\theta}=c\overline{X}+d\overline{Y}$为 θ 的无偏估计.并使其方差最小(在所有形如 $a\overline{X}+b\overline{Y}$的无偏估计类中最小).(b) 基于$\hat{\theta}$,作出 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间.

19. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自具参数λ_1 的指数分布的样本,$Y_1,\cdots,Y_m$ 是抽自具参数为λ_2 的指数分布的样本,试求 λ_2/λ_1 的区间估计.

20. 设 X_1,X_2 为抽自具密度函数

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{\theta-x}, x\geqslant\theta\\0, x<\theta\end{cases}$$

的总体的样本.参数 θ 的先验密度为

$$h(\theta)=\begin{cases}e^{-\theta}, \theta>0\\0, \theta\leqslant 0\end{cases}$$

求 θ 的贝叶斯区间估计.

21. 证明(3.2)式.

22. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自均匀分布总体 $R(\theta_1,\theta_2)$ 的样本.证明:存在只依赖于 n 的常数 c_n,使 $\overline{X}-c_nS$ 和 $\overline{X}+c_nS$ 分别是 θ_1 和 θ_2 的无偏估计.

23. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自正态总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 的样本,θ 和 σ^2 都未知.证明:$\overline{X}$ 仍为 θ 的 MVU 估计.