1.1° $\beta(\theta)=1-\left[\Phi\left(\frac{C_2-\theta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{C_1-\theta}{\sigma}\right)\right]$. Φ 为标准正态 $N(0,1)$的分布函数.

2° 这归结为方程组

$$\Phi\left(\frac{C_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{C_1-a}{\sigma}\right)=1-\alpha \tag{1}$$

$$\Phi\left(\frac{C_2-b}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{C_1-b}{\sigma}\right)=1-\alpha \tag{2}$$

这方程组可以用如下的叠代方式,借助于正态分布表求解:指定 C_1 的一个初始值 C_1^0. 由(1),(2)分别决定出 C_1 的各一个值,若二者差距不在容许范围内,其算术平均取为 C_2^0 以 C_2^0 代入(1),(2),分别解出两个 C_1 值. 若二者差距不在容许范围内,其算术平均取为 C_1 的下一个值 C_1^1. 然后以 C_1^1 代入(1),(2)中之 C_1,定出 C_2 之下一个值 C_2'. 这样继续到某次定出的两个值差距在容许范围内为止.

3° 记 $\Phi'(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$,易见 $\beta(\theta)$的导数为

$$\beta'(\theta) = \frac{1}{\sigma}\left[\varphi\left(\frac{C_2-\theta}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{C_1-\theta}{\sigma}\right)\right]$$

由 $\varphi(x)$ 的形式易看出：$\theta < \dfrac{C_1+C_2}{2}$ 时 $\beta'(\theta)<0$，当 $\theta > \dfrac{C_1+C_2}{2}$ 时 $\beta'(\theta)>0$，故 $\beta(\theta)$ 当 θ 由 $-\infty$ 变到 ∞ 时，先下降到 $(C_1+C_2)/2$ 点处达到最小值，然后上升（见图 7）. 由于 $\beta(a)=\beta(b)$，看出 $a<(c_1+c_2)/2<b$，而在 $[a,b]$ 区间内，$\beta(\theta)$ 之值不大于 α.

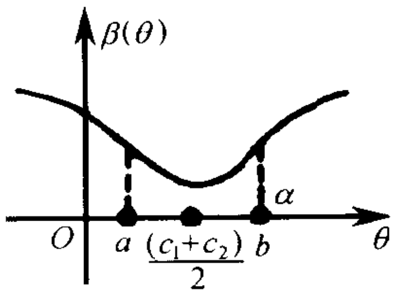

图 7

注：显然，$\beta(\theta)$ 的图形关于点 $(c_1+c_2)/2$ 对称，由此可知，a，b 与 $(c_1+c_2)/2$ 有等距离，这说明必有 $c_1+c_2=a+b$. 这个事实提供了解方程组(1)，(2)的一种“try and error”的方法：取 c_1 的初始值 $c_1^0<(a+b)/2$. 由 $c_2^0=(a+b)-c_1^0$ 定出 c_2 的初始值 c_2^0. 以这两值代入(1)，(2)，若右边小于 $1-\alpha$，说明 c_1^0 选得太大，否则就选得太小，经几步纠正达到接近相等为止.

4° 此由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=1$ 立即得出. 表示当 θ 之真值与原假设距离愈来愈远时，本检验以愈来愈确定的把握否定之.

2. 依直观考虑，检验取为“当 $c_1\leqslant \bar{X}\leqslant c_2$ 时接受 H_0，不然就否定 H_0”. 利用 $2n\lambda\bar{X}\sim\chi^2_{2n}$，一切与第一题相似，在求解 c_1, c_2 时要用到精细的卡方分布表才行.

3. 令 $T=\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}(\bar{X}-\bar{Y})/\sigma$. 证明：当原假设成立时有 $T\sim N(0,1)$. 由此作出检验：当 $|T|\leqslant u_{\alpha/2}$ 时接受 H_0，不然就否定 H_0.

算出其功效函数为

$$\beta(a,b) = 1-\left[\Phi\left(u_{\alpha/2}-\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\frac{d}{\sigma}\right)\right.$$

$$-\Phi\left(-u_{\alpha/2}-\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\frac{d}{\sigma}\right)\Bigg]$$

其中 $d=a-b$. 令上式右端为 $1-d_2$,解出 d 之值(有两个: $\pm d_1$)其正解即所求之 d_1.

4. $\bar{X}-c\bar{Y}\sim N\left(a-cb,\frac{m+nc^2}{mn}\sigma^2\right)$仿照两样本 t 检验的得出过程,作统计量

$$T=\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+nc^2}}(\bar{X}-c\bar{Y})\Bigg/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\bar{Y})^2}$$

而得出当 H_0 成立时 $T\sim t_{m+n-2}$. 由此得出检验:当 $|T|\leqslant t_{m+n-2}(\alpha/2)$时接受 H_0,不然就否定 H_0.

5. 作变换 $X_i'=cX_i,\cdots,i=1,n$. 考虑两组样本

$$X_1',\cdots,X_n' \text{和} Y_1,\cdots,Y_m \tag{3}$$

它们都有正态分布,等方差 σ_2^2,但 X_i'之均值为 $a'=ca$, Y_j 之均值为 b. 故就样本(3)而言,原来的假设 H_0 转化为 $a'=cb$. 因而转化为第 4 题.

6. 利用 $\lambda_1\bar{X}/(\lambda_2\bar{Y})\sim F_{2n,2m}$这个事实.

7. 记 $T=\max(X_1,\cdots,X_n)$. 从直观上看,θ 愈大,T 也愈倾向于取大值. 故一个合理的检验为:当 $T\leqslant C$ 时接受H_0,不然就否定 H_0. 为定 C,计算其功效函数(这用到 T 的分布,参考第二章 22 题)

$$\beta(\theta)=P(T>C)=1-(C/\theta)^n$$

它是 θ 的增函数,故为使 $\beta(\theta)\leqslant\alpha$ 当 $\theta\leqslant\theta_0$,只须使 $\beta(\theta_0)=\alpha$ 即可. 这定出 $C=(1-\alpha)^{1/n}\theta_0$.

注:有人可能这样想:θ 愈大,$T_1=\min(X_1,\cdots,X_n)$也倾向于取大值. 为何不用基于 T_1 的检验? 理由在于:T_1 中所含 θ 的信息不如 T 多,这一点可参考第四章 10 题. 进一步可以证明:基于 T 的上述检验,是 H_0 的一致最优检验. 这一点用附录 A 的方法

不难证明.

8. 从 $f(x,\theta)$ 的图形(见图 8)看出:观察值 $X_1,\cdots,X_n$ 落在 θ 附近的可能性大,所以 $T=\min(X_1,\cdots,X_n)$ 接近 θ 且包含了 θ 较多的信息. 显然,当 θ 大时,T 倾向于大. 故 H_0 的一个直观上合理的检验是:当 $T\leqslant C$ 时接受 H_0,不然就否定 H_0. 为要根据水平 α 决定 C,要算出 T 的分布. 这可按第二章第 22 题解决,但下述观察简化了问题:令 $X_i'=X_i-\theta$, $i=1,\cdots,n$. 则易见 X_i' 有指数密度 e^{-x} 当($x>0$. $x\leqslant 0$ 时为 0). 从此出发用第二章 22 题,易得 $T'=\min(X_1',\cdots,X_n')$ 的密度函数为 ne^{-nx}(当 $x>0$. $x\leqslant 0$ 时为 0). 由于 $T=T'+\theta$,得出 T 的密度函数 $g(x,\theta)$ 为

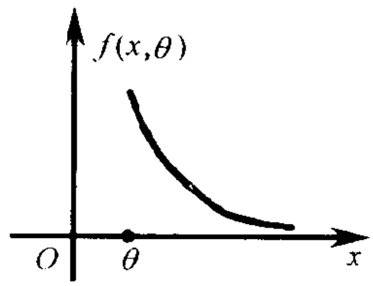

图 8

$$g(x,\theta)=\begin{cases} ne^{-n(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\leqslant\theta \end{cases}$$

因此上述检验的功效函数为

$$\beta(\theta)=P_\theta(T>C)=\int_{\max(c,\theta)}^{\infty} ne^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x=e^{-n(\max(c,\theta)-\theta)}$$

此为 θ 的增函数(何故?)故为使 $\beta(\theta)\leqslant\alpha$ 当 $\theta\leqslant\theta_0$,只须使 $\beta(\theta_0)=\alpha$. 这定出 $C=\theta_0+\dfrac{1}{n}\log\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

9. 从直观上易理解应取接受域为 $X>C$,C 为整数. 因为 p 愈小,为出现 r 次事件 A 所需的总试验次数就倾向于大,上述检验的功效函数为

$$\beta(p)=\sum_{k=0}^{C}\binom{r+k-1}{r-1}p^r(1-p)^k$$

需要证明它是 p 的非降函数. 这用概率方法证最容易. 如第二章习题 7(b)的做法,设想一个试验有三个互斥的结果 A_1,A_2,A_3,其概率分别为 p_1, p_2-p_1 和 $1-p_2$. 此处 $0\leqslant p_1<p_2\leqslant 1$. 令 $A=A_1+A_2$,其概率 p_2. 以 X_1 记到事件 A_1 出现 r 次时的试验总次

数,以 X_2 记到事件 A 出现 r 次时的试验总次数,则 $\beta(p_1)=P(X_1-r\leqslant C),\beta(p_2)=P(X_2-r\leqslant C)$. 由于总有 $X_1\geqslant X_2$,如 $\{X_1-r\leqslant C\}\subset\{X_2-r\leqslant C\}$ 因而 $\beta(p_1)\leqslant\beta(p_2)$. 这证明了 $\beta(p)$ 的非降性. 故为使 $\beta(p)\leqslant\alpha$ 当 $p\leqslant p_0$,只须找 C,使

$$\beta(p_0)=\sum_{k=0}^{C}\binom{r+k-1}{r-1}p_0^r(1-p_0)^k=\alpha$$

若不存在这样的整数 C,则找 C,使

$$\sum_{k=0}^{C}\binom{r+k-1}{r}p_0^r(1-p_0)^k<\alpha$$
$$<\sum_{k=0}^{C+1}\binom{r+k-1}{r}p_0^r(1-p_0)^k$$

把上式左右两边分别记为 A,B. 则准确达到水平 α 的随机化检验为:若 $X\leqslant C$,否定 H_0;若 $X\geqslant C+2$,接受 H_0. 若 $X=C+1$,则以概率

$$\left(\alpha-\sum_{k=0}^{C}\binom{r+k-1}{r}p_0^r(1-p_0)^k\right)\Big/(B-A)$$
$$=\left(\alpha-\sum_{k=0}^{C}\binom{r+k-1}{r}p_0^r(1-p_0)^k\right)$$
$$\Big/\left[\binom{r+c}{r}p_0^r(1-p_0)^{c+1}\right]$$

接受 H_0.

10. 在得到观察值 X 时,在所述先验分布之下,p 有后验密度

$$h(p\mid X)=\frac{1}{\beta(r+1,x+1)}p^r(1-p)^x$$

要计算积分 $\int_0^{p_0}p^r(1-p)^X\mathrm{d}p/\beta(r+1,X+1)$,看是否超过 $1/2$. 此积分称为“不完全 β 积分”,有表可查.

11. 因为样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的密度函数为

$$f(X_1,\cdots,X_n;\theta)=\theta^{-n},\text{当}\max(X_1,\cdots,X_n)\equiv T\leqslant\theta$$

$= 0$,其他情况

故得在所述先验分布之下,$(X_1,\cdots,X_n)$的边缘密度函数为

$$h(X_1,\cdots,X_n) = \frac{1}{a}\int_T^a \theta^{-n}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{(n-1)a}[T^{-(n-1)} - a^{-(n-1)}]$$

(当 $0\leqslant T\leqslant a$. 其他处为 0). 由此得 θ 的后验密度为

$$h(\theta \mid X_1,\cdots,X_n) = \begin{cases}(n-1)\theta^{-n}/(T^{-(n-1)} - a^{-(n-1)}, & T\leqslant\theta\leqslant a\\ 0 & ,\text{其他处}\end{cases}$$

然后计算

$$\int_0^{\theta_0} h(\theta \mid X_1,\cdots,X_n)\mathrm{d}\theta = \begin{cases}(T^{-(n-1)} - \theta_0^{-(n-1)})/(T^{-(n-1)} - a^{-(n-1)}, & \theta_0 > T\\ 0\quad , & \theta_0\leqslant T\end{cases}$$

视其值是否大于 1/2 而决定是否接受 H_0.

12. 按甲的做法,否定域为 $X\leqslant C$,X 为第 9 次出现 A 时,$\bar{A}$ 出现的次数,其功效函数

$$\beta_1(p) = P_p(X\leqslant C) = \sum_{k=0}^{C}\binom{8+k}{k}p^9(1-p)^k$$

为 p 的非降函数(第 9 题). 为定 C,应使

$$\sum_{k=0}^{C}\binom{8+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{9+k} = \beta_1(1/2) = 0.05$$

当 $C=2$ 时上式为 0.033,$C=3$ 时为 0.073. 故如严格要求水平为 5%,则按第 9 题,当 $C=3$(即甲的试验结果)时,应以概率$(0.05-0.033)/(0.073-0.033)=0.425$ 否定 H_0. 所以,按甲的结果,是否接受 H_0 还不一定.

按乙的做法,否定域为 $Y>C$,Y 为第 3 次 $\bar{A}$ 出现时,A 出现的次数. 其功效函数为

$$\beta_2(p) = P_p(Y > C) = 1 - \sum_{k=0}^{C}\binom{2+k}{k}(1-p)^3p^k$$

此为 p 的非降函数(何故?),为定 C,应使

$$1-\sum_{k=0}^{C}\binom{2+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{3+k}=\beta_2(1/2)=0.05$$

当 $C=8$ 时,此式之值为 0.0327. 因此,否定域 $\{Y>C\}$ 中的 C 值不能大于 8. 所以,凡是大于 8 的 Y 值,都要否定 H_0. 现乙的试验结果为 $Y=9$,故 H_0 必被否定.

本例有趣之处在于:表面上甲、乙二人试验结果完全一样,都是在 12 次试验中,A 出现 9 次,$\bar{A}$ 出现 3 次. 但由于出发点不同而导致模型有所不同,影响了检验结果. 也有人把这类例子看成是现行统计方法的缺陷的证明,因为他们认为:同样的数据应导致同样的结果.

13. 当 n_1,n_2 充分大时有 $(X-n_1p_1)\big/\sqrt{n_1p_1(1-p_1)}\sim N(0,1)$, $(Y-n_2p_2)\big/\sqrt{n_2p_2(1-p_2)}\sim N(0,1)$. 故近似地有

$$X/n_1\sim N(p_1,p_1(1-p_1)/n_1),$$
$$Y/n_2\sim N(p_2,p_2(1-p_2)/n_2),$$

因而近似地也有

$$Z\equiv X/n_1-Y/n_2\sim N(p_1-p_2,\sigma^2)$$

其中 $\sigma^2=p_1(1-p_1)/n_1+p_2(1-p_2)/n_2$. 如 σ^2 已知,则检验 $p_1-p_2=0$ 相当于检验正态变量 Z 之均值为 0,其否定域应取为 $|Z|>\sigma u_{\alpha/2}$. 现 σ^2 未知,可以用

$$\hat{\sigma}^2=\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1+\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2$$

去估计之,$\hat{p}_1=X/n_1$, $\hat{p}_2=Y/n_2$. 最后得出 H_0: $p_1=p_2$ 的大样本检验的否定域为

$$\left|X/n_1-Y/n_2\right|>u_{\alpha/2}[(X/n_1)(1-X/n_1)$$
$$+(Y/n_2)(1-Y/n_2)]^{1/2}$$

14. (a) 先设 $\lambda=n$, n 为自然数. 这时 $X\sim P(n)$ 可表为 $X=X_1+\cdots+X_n$, $X_1,\cdots,X_n$ 独立且各服从波哇松分布 $P(1)$. 因 X_i 的方差为 1,按中心极限定理有 $(X_1+\cdots+X_n-n)/\sqrt{n}\to N(0,1)$ 即 $(X-n)/\sqrt{n}\to N(0,1)$. 当 λ 不为自然数时,设 $n<\lambda<n+1$.

则按上面的表达式，有 $X_1+\cdots+X_n \leqslant X \leqslant X_1+\cdots+X_{n+1}$. 有

$$\frac{X_1+\cdots+X_n-n-1}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \frac{X_1+\cdots+X_{n+1}-n}{\sqrt{\lambda}} \quad (4)$$

但

$$\frac{X_1+\cdots+X_n-n-1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}\,\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

因为已证 $(X_1+\cdots+X_n-n)/\sqrt{n} \to N(0,1)$, 又 $\sqrt{n/\lambda} \to 1$, 而 $1/\sqrt{\lambda} \to 0$, 知 $(X_1+\cdots+X_n-n-1)/\sqrt{\lambda} \to N(0,1)$. 同理证明 $(X_1+\cdots+X_{n+1}-n)/\sqrt{\lambda} \to N(0,1)$. 由此及(4)式，即证明了 $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda} \to N(0,1)$ 当 $\lambda \to \infty$. (b)否定域可取为 $|X-\lambda_0|/\sqrt{\lambda_0} > u_{\alpha/2}$.

16. 记题中之公共比值为 θ，则易见

$$P(X=i)=\theta^{i-1}/(1+\theta+\theta^2+\theta^3),\ i=1,2,3,4$$

于是得似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{4}[P(X=i)]^{n_i}=\theta^{n_2+2n_3+3n_4}(1+\theta+\theta^2+\theta^3)^{-n}$$

由此得到决定 θ 值的方程 $\mathrm{d}(\log L(\theta))/\mathrm{d}\theta=0$，即

$$(n_2+2n_3+3n_4)/\theta-n(1+2\theta+3\theta^2)/(1+\theta+\theta^2+\theta^3)=0$$

遍乘 $\theta(1+\theta+\theta^2+\theta^3)$，得到 θ 的一个 3 次方程，它有公式求解. 如有多于一个实根，还须逐一代入 $L(\theta)$ 中，看哪一个达到最大，这一个就取为 θ 的估计值 $\hat{\theta}$. 因只有一个参数 θ，自由度应为 $4-1-1=2$.

17. 按指数分布，落入区间 I_i 内的概率为

$$p_i(\lambda)=\int_{(i-1)a}^{ia}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=e^{-\lambda(i-1)a}(1-e^{-\lambda a}),\ i=1,\cdots,k$$

$$p_{k+1}(\lambda)=\int_{ka}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=e^{-\lambda ka}$$

暂记 $\theta=e^{-\lambda a}$，得到似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{k+1}[p_i(\lambda)]^{n_i}=(1-\theta)^{n-n_{k+1}}\theta^{n_2+2n_3+\cdots+kn_{k+1}}$$

使 $L(\theta)$达到最大的 θ 为

$$\hat{\theta} = (n_2 + 2n_3 + \cdots + kn_{k+1})/(n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k + kn_{k+1})$$

相应地得出 λ 的估计

$$\hat{\lambda} = a^{-1}\log(1/\hat{\theta})$$

拟合优度统计量的自由度为$(k+1)-1-1=k-1$.

19. 1° 只需注意 Z 的表达式(3.2)中,当原假设成立时,有 $\nu_i \sim B(n, p_i)$. 故 $E(np_i - \nu_i)^2$ 就是二项分布 $B(n, p_i)$的方差,即 $np_i(1-p_i)$. 故

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{k} E(np_i - \nu_i)^2/np_i = \sum_{i=1}^{k} np_i(1-p_i)/np_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(1-p_i) = k - \sum_{i=1}^{k} p_i = k-1.$$

2° 要算 $\mathrm{Var}(Z)$,须计算 $E(Z^2)$. 这涉及到以下两种类型的量的计算:$E(np_1-\nu_1)^4, E(np_1-\nu_1)^2(np_2-\nu_2)^2$. 前者较易,它归结到 $E(X^i)$的计算,$X \sim B(n, p)$. 这可以利用

$E[X(X-1)\cdots(X-i+1)/n(n-1)\cdots(n-i+1)] = p^i$ 而得到(第四章习题 9),第二种类型的量归结为形如

$$E[X_1(X_1-1)X_2(X_2-1)], E[X_1(X_1-1)X_2],$$

$$E(X_1X_2), E(X_1)$$

等的计算,其中(X_1, X_2, X_3)服从多项式分布 $M(n; p_1, p_2, p_3)$(第二章例 2.2),这可以仿照第二章例 4.1 那种方式去处理,例如

$$E[X_1(X_1-1)X_2(X_2-1)] = \sum{}^{*} \frac{n!}{i_1!\,i_2!\,(n-i_1-i_2)!}$$

$$\cdot\, i_1(i_1-1)i_2(i_2-1)p_1^{i_1}p_2^{i_2}(1-p_1-p_2)^{n-i_1-i_2}$$

$\sum{}^{*}$ 表示求和范围为:i_1, i_2 为非负整数,$i_1+i_2 \leqslant n$. 上式可写为(记 $i'_1 = i_1-2, i'_2 = i_2-2$) $n(n-1)(n-2)(n-3) \times \sum{}' \frac{(n-4)!}{i'_1!\,i'_2!\,(n-4-i'_1-i'_2)!} p_1^{i'_1}p_2^{i'_2}(1-p_1-p_2)^{n-4-i'_1-i'_2}$.

$p_1^2p_2^2$, $\sum'$ 表示求和范围为：i'_1，i'_2为非负整数，$i'_1+i'_2\leqslant n-4$. 上式中之和为 1. 故得

$$E[X_1(X_1-1)X_2(X_2-1)]=n(n-1)(n-2)(n-3)p_1^2p_2^2$$

其他量类似计算，最后经过整理得到 Z 的方差(在原假设成立下)表达式为

$$\mathrm{Var}(Z)=2(k-1)-(k^2+2k-2+\sum_{i=1}^{k}1/p_i)/n$$

其极限(当 $n\to\infty$)为 $2(k-1)$，即 χ_{k-1}^2的方差.

20. 方法与附录 A 中讲的完全一样，考虑 1°取定 $p_1>p_0$，考虑简单假设检验问题：

$$H_0:p=p_0;H_1:p=p_1$$

证明：(2.38)式定义的检验 φ 是此问题的一致最优检验. 证明这一点的方法，按附录 A，只是归结为验证：对否定域中的任一点 k 和接受域中的任一点 l，必有

$$\frac{\binom{n}{k}p_1^k(1-p_1)^{n-k}}{\binom{n}{k}p_0^k(1-p_0)^{n-k}}\geqslant\frac{\binom{n}{l}p_1^l(1-p_1)^{n-l}}{\binom{n}{l}p_0^l(1-p_0)^{n-l}}$$

然后注意到检验 φ 与 p_1 无关，且 φ 作为 $p\leqslant p_0$ 的检验也有水平 α 即可.