附　　录

A. 若干检验的一致最优性

在本章定义 1.3 中已给出了一个检验问题 $H_0:H_1$ 的水平 α 一致最优检验的定义.它是一切水平 α 检验中其功效在对立假设 H_1 上处处达到最大的检验.如已说明的,这种检验的存在是稀有的例外,但在一些重要的单参数分布族的单侧检验问题中,以及在个别多参数检验中,它确实存在.5.2 节中许多例子属于这种情况.这里我们来作一些讨论.

1. 简单假设下的奈曼-皮尔逊基本引理

考虑一个最简单的情况:原假设 H_0 和对立假设 H_1 中,都只包含一分布.为确定计,设分布都有密度,离散型的情况完全类似,只须把积分变成求和即可.因此,有

$$H_0:\text{总体有密度 } f_0(x)$$

$$H_1:\text{总体有密度 } f_1(x)$$

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为样本,则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的密度,在 H_0 和 H_1 之下,分别为 $g_0(y)=f_0(x_1)\cdots f_0(x_n)$ 和 $g_1(y)=f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)$.这里已简记 $y=(x_1,\cdots,x_n)$.求这个问题的水平 α 的检验,转化为下述数学问题:找 y 空间之一区域 Q,作为检验的否定域(当 $(X_1,\cdots,X_n)$ 落在 Q 内时否定 H_0,不然就接受 H_0).为使 Q 达到最优,就必须在条件

$$\int_Q g_0(y)\mathrm{d}y \leqslant \alpha$$

之下,使 $\int_Q g_1(y)\mathrm{d}y$ 达到最大.很容易看出:为达到这一点,Q 必须这样取:把比值 $g_1(y)/g_0(y)$ 大的那些 y 收进来.这就是奈-皮基本引理:

奈-皮基本引理　水平 α 的一致最优检验 φ 的否定域 Q 应如下取:找常数 C,使

$$Q = \{y : g_1(y)/g_0(y) > C\} \tag{1}$$

而满足

$$\int_Q g_0(y)\mathrm{d}y = \alpha \tag{2}$$

证 (2)式保证了检验 φ 的水平为α，现设 φ'为另一水平α 检验，其否定域为 Q'. 记 Q 与Q'的公共部分为R. Q_1 记 Q 中去掉 R 的剩余部分，Q'_1 记 Q'中去掉R 的剩余部分(图 5.5)，则易见

$$\int_Q g_1(y)\mathrm{d}y - \int_{Q'} g_1(y)\mathrm{d}y = \int_{Q_1} g_1(y)\mathrm{d}y - \int_{Q'_1} g_1(y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

由于 φ'有水平α，有

$$\int_{Q'} g_0(y)\mathrm{d}y \leqslant \alpha$$

再由(2)式，知

$$\int_{Q_1} g_0(y)\mathrm{d}y \geqslant \int_{Q'_1} g_0(y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

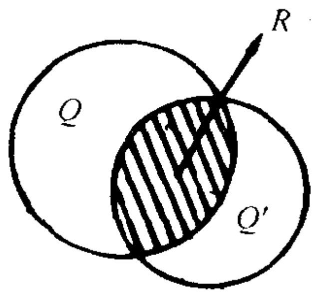

图 5.5

因为 Q'_1 在 Q 之外，按(1)式，当 y 属于Q'_1 时，有 $g_1(y) \leqslant Cg_0(y)$. 而当 y 属于Q_1 时有 $g_1(y) > Cg_0(y)$. 故

$$\int_{Q_1} g_1(y)\mathrm{d}y \geqslant C\int_{Q_1} g_0(y)\mathrm{d}y, \int_{Q'_1} g_1(y)\mathrm{d}y \leqslant C\int_{Q'_1} g_0(y)\mathrm{d}y$$

由此及(3)，(4)，即知

$$\int_Q g_1(y)\mathrm{d}y \geqslant \int_{Q'_1} g_1(y)\mathrm{d}y$$

即检验 φ 的功效总不小于 φ'的功效，由于 φ'是任取的水平α 检验，证明了 φ 是水平α 的一致最优检验.

2. 复合假设检验的情况

现考虑一般的复合假设检验问题 H_0:H_1. 关于其水平 α 一致最优检验的存在，有如下的简单结果：

定理 在 H_0 中取定一值 θ_0，对 H_1 中的值 θ_1 建立假设检验问题：

$$H'_0:\theta_0;H'_1:\theta_1 \tag{5}$$

按奈-皮引理，求出其水平 α 一致最优检验 φ. 如果 φ 符合以下两个条件，则它必须是原问题 $H_0:H_1$ 的一个水平 α 一致最优检验：

1° 检验 φ 也是 $H_0:H_1$ 的水平 α 检验.

2° 检验 φ 不依赖于 θ_1 值.

证 设 φ' 为 $H_0:H_1$ 之任一水平 α 检验，则它必是(5)的一个水平 α 检验. 这很显然：以 $\beta_{\varphi'}(\theta)$ 记 φ' 的功效函数. φ' 为 $H_0:H_1$ 的水平 α 检验，意味着 $\beta_{\varphi'}(\theta)$ 在 H_0 上处处不超过 α，因而特别在 θ_0 点不超过 α. 这样，φ 和 φ' 都是(5)的水平 α 检验而 φ 是(5)的水平 α 一致最优检验，故 $\beta_\varphi(\theta_1)\geqslant\beta_{\varphi'}(\theta_1)$. 因为这个事实对 H_1 中任一个 θ_1 都成立，即知 φ 为 $H_0:H_1$ 的水平 α 一致最优检验.

在本定理中，θ_0 值如何取？对形如 $\theta\leqslant a$ 或 $\theta\geqslant a$ 这样的单侧原假设，θ_0 总是取为 a.

例 1 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自正态总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 已知，考虑检验问题

$$H_0:\theta\leqslant a;H_1:\theta>a \tag{6}$$

a 为给定常数.

按本定理，取 $\theta_0=a$，任取 $\theta_1>a$. 作检验问题

$$H_0':\theta=a;H_1':\theta=\theta_1 \tag{7}$$

按奈-皮基本引理，(7)的水平 α 一致最优检验 φ 有否定域：

$$\left\{(x_1,\cdots,x_n):\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_1)^2\right]\right.$$

$$\left.\Big/\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-a)^2\right]>C\right\}$$

取对数，易知此集合为

$$\left\{(x_1,\cdots,x_n):\sigma^{-2}(\theta_1-a)\sum_{i=1}^n x_i>C_1\right\}$$

对某个常数 C_1. 因 $\theta_1-a>0,\sigma^2>0$，此集合化为

$$\left\{(x_1,\cdots,x_n):\sum_{i=1}^n x_i>C_2\right\} \tag{8}$$

的形状. C_2 为另一常数，要使此检验有水平 α，应取 $C_2=na+$

$\sqrt{n}\sigma u_\alpha$. 此值与 θ_1 无关,因而定理的条件 2°满足. 另外,这个检验的功效函数是 $1-\Phi\left(u_\alpha-\dfrac{\theta-a}{\sigma}\right)$,是 θ 的上升函数. 所以,这个检验也是(6)的水平 α 检验. 这样,条件 1°也适合. 据定理,这检验就是(6)的水平 α 的一致最优检验.

指数分布,二项分布和波哇松分布参数的单侧假设检验问题,也可以用与本例相同的方法证明其一致最优检验存在. 留给读者作为习题.

若在本例中考察双侧假设 $H_0:\theta=a, H_1:\theta\neq a$,则一致最优检验不存在,其理由现在也不难看出,因现在 θ_1 可以大于 a 也可以小于 a. 当 $\theta_1>a$ 时,检验问题(7)的一致最优检验的形式如(8). 若 $\theta_1<a$,则一致最优检验的否定域形如

$$\left\{(x_1,\cdots,x_n):\sum_{i=1}^n x_i<C_3\right\}$$

与(8)不同. 因此,定理的条件 2°不满足.

B. 非中心 t 分布与 t 检验

设 X 与 Y 独立,$X\sim N(0,1)$,$Y\sim\chi_n^2$,又设 δ 为常数,则随机变量 $Z=(X+\delta)\Big/\sqrt{\dfrac{1}{n}Y}$ 的分布称为自由度 n、非中心参数 δ 的非中心 t 分布,记为 $Z\sim t_{n,\delta}$. $t_{n,\delta}$的分布函数将记为 $F_{n,\delta}(x)$. 当 $\delta=0$ 时,就得到在第二章例 4.10 中介绍过的自由度 n 的 t 分布(有时称中心 t 分布).

非中心 t 分布也是数理统计应用上的重要分布,但其分布函数 $F_{n,\delta}(x)$的形式很复杂,此处不去介绍. 只提到一点对下文有用的性质:若 $\delta_2>\delta_1$,则 $F_{n,\delta_2}(x)\leqslant F_{n,\delta_1}(x)$. 事实上,记

$$Z_i=(X+\delta_i)\Big/\sqrt{\frac{1}{n}Y}, i=1,2$$

X,Y 如上文所述,则有 $Z_1<Z_2$,故对任何 x 有 $P(Z_1\leqslant x)\geqslant P(Z_2\leqslant x)$,即 $F_{n,\delta_1}(x)\geqslant F_{n,\delta_2}(x)$.

有了这些准备,我们可以解决 5.2 节中遗留下来的有关 t 检

验的问题.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $N(\theta,\sigma^2)$ 中的样本，θ,σ^2 都未知，对假设检验问题

$$H_0:\theta\geqslant\theta_0, H_1:\theta<\theta_0$$

我们引进了 t 检验 ψ，由(2.14)给出.其功效函数为(2.15).现易知，(2.15)的 $\beta_\psi(\theta,\sigma)$ 为

$$\beta_\psi(\theta,\sigma)=F_{n-1,\sqrt{n}(\theta-\theta_0)/\sigma}(-t_{n-1}(\alpha)) \tag{9}$$

事实上，有

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)/S=\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sigma}+\frac{\sqrt{n}(\theta-\theta_0)}{\sigma}\right)\Big/\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}S^2}$$

当参数值为(θ,σ)时，$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)/\sigma\sim N(0,1)$，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$，且二者独立.故按非中心 t 分布的定义及(2.15)式，即得(9).

由(9)式可知，$\beta_\psi(\theta,\sigma)$ 为 θ 的下降函数.因当 θ 增加时，$\sqrt{n}(\theta-\theta_0)/\sigma$ 增加.按前面证明的性质，即知(9)式右边下降，因为$\beta(\theta_0,\sigma)=\alpha$，知当 $\theta\geqslant\theta_0$ 时有 $\beta_\psi(\theta,\sigma)\leqslant\alpha$.这证明了：$t$ 检验(2.14)有水平 α.

其次，功效函数(9)的形式也说明：给定 $\theta_1<\theta_0$ 及 $\beta<\alpha$，不论你取样本大小 n 多大，也无法保证对一切 $\sigma>0$ 有 $\beta_\psi(\theta_1,\sigma)\geqslant\beta$，事实上，固定 n，当 $\sigma\to\infty$时有

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to\infty}\beta_\psi(\theta_1,\sigma)&=\lim_{\sigma\to\infty}F_{n-1,\sqrt{n}(\theta-\theta_0)/\sigma}(-t_{n-1}(\alpha))\\&=F_{n-1,0}(-t_{n-1}(\alpha))=\alpha\end{aligned}$$

这样，不论你固定 n 多大，只要 α 充分大，就可以使 $\beta_\psi(\theta_1,\sigma)<\beta$.

如果以 σ 为单位来衡量 θ_1 与 θ_0 的差距，即要求当$(\theta_1-\theta_0)/\sigma$固定为某个指定的$\delta_0<0$ 时有 $\beta_\psi(\theta_1,\sigma)\geqslant\beta$($\beta$ 为指定的小于 1 的数)，则这可以做到：只须取 n 充分大，使 $F_{n-1,\sqrt{n}\delta_0}(-t_{n-1}(\alpha))\geqslant\beta$.这可以通过查非中心 t 分布表求得.

这个在实用上看也是合理的.在方差未知时,均值距离的实际意义如何,往往要看方差大小而定.方差愈大,一定的均值距离意义就愈小.好比秤的误差愈大,两件东西的重量就必须有更大的差别,才能较有把握地在这把秤上显示出来.(9)式中的功效函数,通过$(\theta-\theta_0)/\sigma$而依赖于(θ,σ),反映了这一点.

类似的结论对两样本 t 检验当然也成立,我们把细节留给读者去完成.