习　题

1. 设 X 为抽自正态总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 中的样本(样本大小为 1). σ 已知, a, b 都是给定常数, $a<b$. 要找原假设 $H_0: a\leqslant\theta\leqslant b$ 的水平 α 检验. 完成以下的步骤:

1°从直观考虑, H_0 的接受域应取为 $C_1\leqslant X\leqslant C_2$, 即当 $C_1\leqslant X\leqslant C_2$ 时接受 H_0, 不然就否定 H_0. 写出这个检验的功率函数 $\beta(\theta)$.

2°找出常数 C_1, C_2 使 1°中找出 $\beta(\theta)$满足

$$\beta(a) = \beta(b) = \alpha$$

3°证明由 1°, 2°决定的检验确是 H_0 的水平 α 检验, 即 $\beta(\theta)\leqslant\alpha$ 当 $a\leqslant\theta\leqslant b$.

4°证明这样决定的检验满足

$$\beta(\theta)\to 1, \text{当} |\theta|\to\infty$$

解释这个结果的意义.

5°如果 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $N(\theta,\sigma^2)$的样本, σ 已知, 利用上面的结果作出 H_0 的检验.

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自指数分布总体的样本, $0<a<b$, a, b 为已知常数. 要检验原假设 $H_0: a\leqslant\lambda\leqslant b$. 描述一下(不须详细推导)用解第 1 题的思想来解这个问题的过程.

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 分别是抽自正态总体 $N(a,\sigma_1^2)$和 $N(b,\sigma_2^2)$的样本, a, b 未知而 σ_1^2, σ_2^2 已知. 试作出原假设 $H_0: a=b$ 的水平 α 检验. 给定 $d_1>0$, $d_2>0$, 令 $m=n$, 决定 n, 使当 $|a-b|\geqslant d_1$ 时, 功效函数不小于 $1-d_2$.

4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 分别是抽自正态总体 $N(a,\sigma^2)$和 $N(b,\sigma^2)$的样本, a, b, σ^2 都未知. 试仿照两样本 t 检验的做法, 构造出原假设 H_0:

$a=cb$ 的一个水平 α 检验. 这里 $c\neq 0$ 为已知常数.

5. 利用上题的结果解决如下的检验问题:设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 分别是抽自正态总体 $N(a,\sigma_1^2)$ 和 $N(b,\sigma_2^2)$ 的样本, $a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 都未知,但比值 $\sigma_2^2/\sigma_1^2=c^2$ 已知,要检验原假设 $H_0:a=b$.

6. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自具参数为 λ_1 的指数分布的样本, $Y_1,\cdots,Y_m$ 为抽自具参数为 λ_2 的指数分布的样本. 作出原假设 $H_0:\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 的水平 α 的检验.

7. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自均匀分布 $R(0,\theta)$ 的样本,给定 $\theta_0>0$. 作出原假设 $H_0:\theta\leqslant\theta_0$ 的水平 α 检验.

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从有下述密度函数的总体中抽出的样本:

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{x-\theta}, & x\leqslant\theta\\ 0, & x>\theta\end{cases}\qquad -\infty<\theta<\infty$$

给定常数 θ_0. 作出原假设 $H_0:\theta\leqslant\theta_0$ 的水平 α 检验.

注:第 7,8 题都需要先由直观出发定出检验统计量,再根据水平 α 定临界值.

9. 设 X 为自负二项分布

$$P_\theta(X=k)=\binom{r+k-1}{r-1}p^r(1-p)^k,$$

$$k=0,1,2,\cdots;0<\theta<1$$

中抽出的样本. 给定 θ_0, $0<\theta_0<1$. 找原假设 $H_0:\theta\leqslant\theta_0$ 的水平 α 检验. 如要求水平严格地为 α,如何实行随机化?

10. 在上题中,如果设 θ 有先验分布 $R(0,1)$,求该题中原假设 H_0 的贝叶斯检验.

11. 在第 7 题中,如果设 θ 有先验分布 $R(0,a)$(a 已知且 $a>\theta_0$). 试求该题中原假设 H_0 的贝叶斯检验.

12. 事件 A 在一试验中发生的概率记为 p,为检验原假设 $H_0:p\leqslant 1/2$ 是否成立,甲、乙二人分别采用下述做法:甲重复试验到 A 第 9 次出现时停止,乙重复试验到 $\overline{A}$ 第 3 次出现时停止,两人都在做完第 12 次试验时,结束试验. 取检验水平 $\alpha=0.05$. 问:甲乙两人分别从其试验结果中作出何种结论? 你从本题结果得到什么启发?

13. 设样本 $X\sim B(n_1,p_1)$, $Y\sim B(n_2,p_2)$. 要检验假设 $H_0:p_1=p_2$. 设 n_1 和 n_2 都充分大,试作出 H_0 的水平 α 的大样本检验.

14. 设样本 X 服从波哇松分布 $P(\lambda)$. (a)试用中心极限定理证明:当 λ

$\to\infty$ 时有

$$(X-\lambda)/\sqrt{\lambda} \to N(0,1)$$

(b)设 λ_0 充分大.用(a)的结果,作出原假设 $H_0:\lambda=\lambda_0$ 的水平 α 大样本检验.

15. 在 5.2 节 5.2.4 段“定数截尾”检验中,我们定义了检验统计量 T(见(2.34)式),并曾指出 $2\lambda T\sim\chi^2_{2r}$. 这个结果直接证明较繁,但用下面的归纳法容易证明,试完成以下步骤.

1°当 $r=1$ 时,这结果成立.为此注意到当 $r=1$ 时,T 就是 nY_1 而 $Y_1=\min(X_1,\cdots,X_n)$. 用第二章 22 题及 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$, 当 $x\leqslant 0$ 时 $f(x)=0$,易求出 Y_1 之分布,因而求出 T 的分布.由此算出 $2\lambda T$ 有密度函数 $\frac{1}{2}e^{-x/2}$(当 $x>0$,下同),此即 χ^2_2 的密度.

2°设 $r=k$ 时结果成立(归纳假设),要证明当 $r=k+1$ 时结果也成立.为此,分别用 T_k 和 T_{k+1} 记当 $r=k$ 和 $r=k+1$ 时的 T 值,而分析一下二者的关系,如右图 5.6,分别显示出 n 个元件依次失效时的寿命 $Y_1,\cdots,Y_n$. 并为方便计,把 Y_k 和 Y_{k+1} 分别记为 a 和 b. 从图上明显看出:

$$T_{k+1}=T_k+(n-k)(b-a) \tag{1}$$

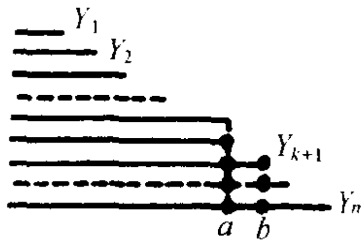

图 5.6

$b-a$ 是什么? 就是从时刻 a 起算,当时尚未失效的 $n-k$ 个元件中最早失效的那个元件的失效时间(以 a 为 0 点的时间!). 这样一来 $(n-k)(b-a)$ 不是别的,正是 $n-k$ 个指数分布变量的最小值乘以个数 $n-k$(这里用了指数分布的无后效性:当一个元件在时刻 a 尚未失效时,其以 a 为起点以后的寿命,仍服从原来的指数分布.见第二章例 1.7). 根据 1°中已证的,$2\lambda(n-k)(a-b)\sim\chi^2_2$. 另外,(1)式右边两项有独立性.这也是根据指数分布无后效性的考虑,而根据归纳假设,$2\lambda T_k\sim\chi^2_{2k}$. 故由卡方分布性质,知 $2\lambda T_{h+1}\sim\chi^2_{2(h+1)}$. 这完成了归纳证明.

这也是一种概率方法——不是单凭分析计算,且利用概率的考虑.它不仅简化了证明,也使我们明白了为什么有这个结果的道理所在.

16. 设变量 X 取 1,2,3,4 等值.有一种理论认为,X 取这 4 个值的概率呈等比级数,即

$$P(X=2)/P(X=1)=P(X=3)/P(X=2)$$

$$= P(X = 4)/P(X = 3)$$

为验证此理论是否正确,对 X 进行 n 次观察,发现 $\overline{X}$ 取 1,2,3,4 为值分别有 n_1, n_2, n_3, n_4 次.试作拟合优度检验,描述步骤即可以,不必去解方程.

17. 为检验变量 X 的分布是否为指数分布(参数 λ 未知),选择适当常数 $a>0$ 及自然数 k,把区间 $[0,\infty)$ 分成 $k+1$ 份:$I_1=[0,a)$,$I_2=[a,2a)$,$\cdots$,$I_k=[(k-1)a,ka)$,$I_{k+1}=[ka,\infty)$.用 5.3 节 5.3.4 段的方法作拟合优度检验,包括该处所介绍的估计未知参数的方法去估计 λ.以 n 记观察次数,$n_1,n_2,\cdots,n_{k+1}$ 分别记这 n 个观察值中落入 $I_1,I_2,\cdots,I_{k+1}$ 中的个数.

18. 证明四格表的公式(3.16).

19. 对由本章(3.2)式定义的拟合优度统计量 Z,我们有定理 3.1:在原假设下 $Z\to\chi_{k-1}^2$ 当 $n\to\infty$.此定理未予证明,但我们可以得出若干侧证:

1°在原假设成立时 $E(Z)=k-1$,与 χ_{k-1}^2 的均值一致;

2°在原假设成立时,$\mathrm{Var}(Z)$ 也可以算出来,从其表达式易看出:$\mathrm{Var}(Z)\to 2(k-1)$ 当 $n\to\infty$,即收敛于 χ_{k-1}^2 之方差.

1°很容易,请读者证明.2°很繁但不难.请读者指出计算 $\mathrm{Var}(Z)$ 的详细步骤,如能坚持算出结果当然很好.

20.(此题用到附录 A 的方法)

1°考虑 5.2 节 5.2.5 段的检验问题 1°.证明:由(2.38)定义的检验 φ(选择其中的 C 使检验水平为 α)是水平 α 的一致最优检验.

2°考虑 5.2 节 5.2.6 段的检验问题 1°.证明:由(2.47)定义的检验 φ(选择其中的 C 使检验水平为 α)是水平 α 的一致最优检验.