6.5 方差分析

方差分析是我们多次提到过的英国大统计学家费歇尔在本世纪20年代创立的.那时他在英国一个农业试验站工作,需要进行许多田间试验,为分析这种试验的结果.他发明了方差分析法.尔后这个方法被用于其他的领域,尤其是工业试验数据的分析中,取得了很大的成功.

这里已经点明:方差分析所针对的数据,是经过一定的"设计"的试验的数据,并非任何杂乱无章的数据都适于使用方差分析法的.说清楚一些,为了能有效地使用方差分析法,试验在安排上必须满足一定的要求.在数理统计学中有一个专门分支,叫"试验的设计与分析",就是专为讨论这个问题.其中的"分析",主要是指方差分析,但也不限于此.

本书以其性质所限,不可能深入地从理论上阐述这些问题,或涉及过多细节.这一节的目的,只在于结合几种最简单的情况,介绍一下方差分析的基本思想和做法,也顺便解释一下试验设计的某些重要概念.

6.5.1 单因素完全随机化设计

假定某个农业地区原来不曾种植小麦,现在打算种植这种作物.各地已有过一些优良品种,但因本地区并无种植小麦的经验,不知道哪一个品种最适合本地区(有最高的产量),甚至也不知道这些品种对本地区是否有差别.为此进行一个田间试验.取一大块地将其分成形状大小都相同的 n 小块.设供选择的品种有 k 个,

我们打算其中的 n_1 小块种植品种 1, n_2 小块种植品种 2, 等等, $n_1+n_2+\cdots n_k=n$. $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的选取并无严格限制. 例如, 让 $n_1=n_2=\cdots=n_k$(如 n/k 为整数), 就是一种常用的选择. 当然, 也可能有某种原因使得另外的选择更好. 这没有关系, 不妨碍试验数据的分析.

分配数目定了, 接着就要定出哪些小块分给哪些品种. 而这是用随机化的方法来定, 做法如下: 取 n 张纸片, 上面分别写上数字 $1,2,\cdots,n$. 把它混乱并放入一个盒子里, 然后一张一张地依次抽出来. 最先抽出的 n_1 个号码给品种 1, 其次抽出的 n_2 个号码给品种 2, 以此类推——当然, 事先已把上述 n 小块地从 1 到 n 标了号. 例如, $n_1=3$. 若最先抽出的 3 张纸条上面的数字依次是 10, 12, 3, 则品种 1 种植在标号为 3, 10 和 12 这 3 小块地上.

以上就是这个简单的品种试验的设计过程. 不要看它简单, 它却包含了由费歇尔指出的"试验设计三原则"中的两条(另一条将在 6.5.4 小节中解释):

1. 重复. 即上述 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 都大于 1: 每个品种不是只种植在一个小块, 而是多个小块, 即有重复. 这样做的原因就是因为有随机误差存在, 而只有通过重复才能对这种误差的影响作出估计. 在本例中, 随机误差的来源, 有各小块地在条件上的差别, 有在进行田间操作和管理上的不均匀性(如施肥时各小块受肥总会略有差别), 及其他可以设想和未曾注意到的种种原因.

随机误差的存在干扰了我们发现品种间差别的工作. 两品种间如果虽有些差别, 但相对于随机误差来说没有大到一定的程度, 就可能被随机误差所掩盖. 品种间由数据上显示的差别, 究竟是实质性的还是表面的, 只有拿随机误差这把尺子去衡量才有定准. 由此可见随机误差的影响的估计的重要性, 而重复的目的正在于此.

2. 随机化. 在本试验中共有 n 个小地块. 虽然在选择哪一大块地时我们可能已力求其各部分条件尽量均匀, 但在划分为 n 小块后, 各块的条件总会有些差别. 如果某个品种正好分到了条件好的那些小块, 则它可能显示出较高产量, 而这并非由于该品种优于

其他品种.

为了使小块的分配不致因为人为的因素而偏于某一或某些品种,我们采用前面所描述的那种随机化分配方式,即哪些小块分配于哪些品种完全凭机会.这种设计之所以称为"完全随机化",是指在分配小块时,除了随机化这一原则外,别无其他条件限制.这是相对于有些试验而言,在那些试验中,除随机化以外,还有别的条件限制小块的分配——只是部分地随机化.

现在可以说,随机化这个原则在统计学中算是确立了.在其提出的早期,部分地以至于今,并非没有反对的意思.支持随机化原则的主要理由有二:一是人为的选择并不能保证有好的效果,人们对各试验单元(在此为各小块)的情况往往并无充分了解,甚至有时了解的情况是错误的;二是用随机化设计所取得的试验数据,往往有便于进行分析的统计模型.

在本例中,影响我们感兴趣的指标——亩产量的因素只有一个,即种子品种.所考虑的不同的种子品种有 k 个.每一个具体的品种,都称为品种这个因素的一个"水平",故品种这个因素一共有 k 个水平.以此之故,本试验称为单因素 k 水平的试验. n_i 称为水平 i 的"重复度".

如果要考虑几种不同的配方对一种工业产品质量的影响,则是一个以"配方"为因素的单因素试验,有几个配方参与试验,就有几个水平.如要比较几种降压药对治疗高血压的作用,则是一个以"药品"为因素的单因素试验,水平数就是参与试验的药品数,等等.在实际问题中,往往有若干个因素参与试验,这时就有多因素试验,见本节6.5.3和6.5.5.

6.5.2 单因素完全随机化试验的方差分析

设问题中涉及一个因素 A,有 k 个水平,如上例的 k 个种子品种.以 Y_{ij} 记第 i 个水平的第 j 个观察值.如上例, Y_{ij} 是种植品种 i 的第 j 小块地上的亩产量.模型为

$$Y_{ij} = a_i + e_{ij}, j = 1,\cdots,n_i, i = 1,\cdots,k \tag{5.1}$$

a_i 表示水平 i 的理论平均值,称为水平 i 的效应.拿上例来说,a_i 就是品种 i 的平均亩产量,e_{ij} 为随机误差.假定:

$$E(e_{ij}) = 0, 0 < \mathrm{Var}(e_{ij}) = \sigma^2 < \infty, \text{一切 } e_{ij} \text{ 独立同分布} \tag{5.2}$$

因素 A 的各水平的高低优劣,取决于其理论平均 a_i 的大小.故对模型(5.1),我们头一个关心的事情,就是诸 a_i 是否全相同.如果是,则表示因素 A 对所考察的指标 Y 其实无影响.这时我们就说因素 A 的效应不显著,否则就说它显著.当然,在实际应用中,所谓"显著",是指诸 a_i 之间的差异要大到一定的程度.这个"一定的程度",是从其实用上的意义着眼,而"统计显著性",则是与随机误差相比而言.这一点在下文的讨论中会有所体现.我们把所要检验的假设写为

$$H_0: a_1 = a_2 = \cdots = a_k \tag{5.3}$$

为检验这个假设,我们作如下的分析:(5.1)中全部 $n = n_1 + \cdots + n_k$ 个观察值各不相同.为什么各 Y_{ij} 的值会有差异?从模型(5.1)看,不外乎两个原因:一是各 a_i 可能有差异.例如,若 $a_1 > a_2$,这就使 Y_{1j} 倾向于大于 Y_{2j}.二是随机误差的存在.这一分析启发了如下的想法:找一个衡量全部 Y_{ij} 的变异的量,它自然地取为($n = n_1 + \cdots + n_k$)

$$SS = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y})^2, \overline{Y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/n \tag{5.4}$$

SS 愈大,表示 Y_{ij} 之间的差异愈大.然后,设法把 SS 分解为两部分,一部分表示随机误差的影响,记为 SS_e;一部分表示因素 A 的各水平理论平均值 $a_1, \cdots, a_k$ 之不同带来的影响,记为 SS_A.

SS_e 这一部分可如下分析:固定一个 i,考虑其一切观察值 $Y_{i1}, Y_{i2}, \cdots, Y_{in}$.它们之间的差异与诸 a_i 之不等无关,而可以完全委之于随机误差.反映 $Y_{i1}, \cdots, Y_{in}$ 的差异程度的量是 $\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2$,其中

$$\overline{Y}_i = (Y_{i1} + \cdots + Y_{in_i})/n_i, i = 1, \cdots, k \tag{5.5}$$

$\overline{Y}_i$ 是水平 i 观察值的算术平均，它可以作为 a_i 的估计. 把上述平方和对 i 相加，得

$$SS_e = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 \tag{5.6}$$

SS_A 就是 SS 与 SS_e 之差. 可以证明

$$SS_A = SS - SS_e = \sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 \tag{5.7}$$

为证此式，只须把分解式

$$Y_{ij} - \overline{Y} = (Y_{ij} - \overline{Y}_i) + (\overline{Y}_i - \overline{Y})$$

两边平方，先固定 i 对 j 求和，注意

$$\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)(\overline{Y}_i - \overline{Y}) = (\overline{Y}_i - \overline{Y}) \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i) = 0$$

然后对 $i = 1, \cdots, k$ 求和即可. 细察 SS_A 的表达式，这确可以用于衡量诸 a_i 之间的差异程度. 因 $\overline{Y}_i$ 是 a_i 的估计，a_i 之间差异愈大，$\overline{Y}_i$ 之间的差异也就倾向于大，而由(5.7)式看出，SS_A 之值也会倾向于大.

在统计学上通常把上文的 SS 称为“总平方和”，SS_A 称为“因素 A 的平方和”，SS_e 称为“误差平方和”. 而分解式 $SS = SS_A + SS_e$ 就称为(本模型的)“方差分析”. 名称的来由显然：像 SS，SS_A，SS_e 这种表达式，都是属于样本方差那一类的形状.

从上面的分析就得到假设(5.3)的一个检验法：当比值 SS_A/SS_e 大于某一给定界限时，否定 H_0，不然就接受 H_0. 为了根据所给的检验水平 α 确定这一界限，要假定随机误差 e_{ij} 满足正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 可以证明，若记

$$MS_A = SS_A/(k-1), MS_e = SS_e/(n-k) \tag{5.8}$$

则在正态假定之下且当 H_0 成立时，有

$$MS_A/MS_e \sim F_{k-1, n-k} \tag{5.9}$$

据(5.9)，即得(5.3)的假设 H_0 的检验如下：

当 $MS_A/MS_e \leqslant F_{k-1,n-k}(\alpha)$ 时,接受 H_0,不然就否定 H_0
$$(5.10)$$
这检验称为(5.3)的 F 检验,名称显然来由于(4.31).

(5.8)式中的 MS_A 和 MS_e,分别称为因素 A 和随机误差的"平均平方和".被除数 $k-1$ 和 $n-k$,分别称为这两个平方和的自由度. MS_e 的自由度为 $n-k$ 比较好理解,因按以前多次指出的:平方和 $\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_i)^2$ 的自由度为 n_i-1,故对 i 求和,得自由度 $(n_1-1)+\cdots+(n_k-1)=n-k$. MS_A 自由度为 $k-1$,初一看好像难于理解,因为一共有 k 个平均值 $a_1,\cdots,a_k$.但我们重视的是它们之间大小的比较,因此,不同的有关量其实只有 a_2-a_1, $a_3-a_1,\cdots,a_k-a_1$(以 a_1 为基准)等 $k-1$ 个,故自由度只应为 $k-1$.二者自由度之和为 $(n-k)+(k-1)=n-1$,恰好是总平方和的自由度.

在统计应用上常把上述计算列成表格,称为方差分析表

表 6.1 单因素完全随机化试验的方差分析表

项 目	SS	自由度	MS	F 比	显著性
A(例如,品种)	SS_A	$k-1$	MS_A	MS_A/MS_e	*,**,或无
误 差	SS_e	$n-k$	MS_e	—	—
总 和	SS	$n-1$	—	—	—

表 6.1 中的各栏,除显著性一栏外,都已解释过了.显著性一栏是这样的:把算出的 F 比,即 MS_A/MS_e,与 $F_{k-1,n-k}(0.05)=c_1$ 和 $F_{k-1,n-k}(0.01)=c_2$ 比较.若 F 比 $>c_2$,用双星"**",表示 A 这个因素的效应"高度显著",意思是,即使指定 $\alpha=0.01$ 这样的检验水平,原假设(5.3)也要被否定.如果 $c_1<F$ 比 $\leqslant c_2$,则用一个星"*"表示 A 的效应"显著",意即在 $\alpha=0.05$ 的水平上,原假设(4.25)要被否定.如果 F 比 $\leqslant c_1$,则不加"*"(显著性一栏空着),表示因素 A 的效应"不显著".当然,这里用的 $\alpha=0.05,0.01$

是比较通用的习惯，并非一定要如此不可．应用者可根据特定的需要改用其他值，如(0.05,0.10)，(0.10,0.20)，(0.001,0.01)等．

例 5.1 设上述品种试验中，包含有 $k=3$ 个品种，分别重复 4、5 和 3 次，数据为(单位：斤/亩)

品种 1：390,410,372,385.

品种 2：375,348,354,364,362.

品种 3：413,383,408.

全部 12 个数的算术平均为 380.33．总平方和为

$$
\begin{aligned}
SS &= (390-377)^2+(410-377)^2+\cdots+(408-377)^2 \\
&= 5274.67
\end{aligned}
$$

其自由度为 $12-1=11$.

3个品种各自数据的算术平均，分别为 389.25，360.60 和 401.33．因此算出误差平方和为

$$
\begin{aligned}
SS_e &= (390-389.25)^2+\cdots+(385-389.25)^2 \\
&\quad+(375-360.60)^2+\cdots+(362-360.60)^2 \\
&\quad+(413-401.33)^2+\cdots+(408-401.33)^2 \\
&= 1686.62
\end{aligned}
$$

其自由度为 $n-k=12-3=9$.

品种平方和 SS_A 可由 $SS_A=SS-SS_e$ 算出．但为了验算，常单独算出，再验证式子 $SS=SS_A+SS_e$ 是否成立(由于计算中取的位数有限，不一定严格相同)．如果不成立，就表示计算中有错误，必须从头查一查．对此例按(4.29)有

$$
\begin{aligned}
SS_A &= 4\times(389.25-380.33)^2+5\times(360.60-380.33)^2 \\
&\quad+3\times(401.33-380.33)^2 = 3588.05
\end{aligned}
$$

自由度为 $3-1=2$．于是

$$
MS_A = 3588.05/2 = 1794.03, MS_e = 1686.62/9 = 187.40
$$

因素 A 的 F 比为

$$
MS_A/MS_e = 1794.68/187.40 = 9.00
$$

查表得 $F_{2,9}(0.05)=4.26$，$F_{2,9}(0.01)=8.02$．因 $9.00>8.02$，故

品种效应是高度显著的. 以上计算结果列成方差分析表如下：

项　目	SS	自由度	MS	F 比	显著性
品　种	3588.05	2	1794.68	9.00	* *
误　差	1686.62	9	187.40	—	
总　和	5274.67	11	—	—	

检验的结果表明：不同品种的产量之间的差异，在统计上高度显著.

就本例而言，如检验的结果不显著，则一般就不再作进一步的分析了. 因为，既然假设(5.3)被接受，各品种的效果视作同一，也就没有多少好说的了. 但在实际工作中，最好还不这么简单地下结论. 有两点还可以考察一下：

1. 各水平理论平均值的点估计 $\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_k$ 之间的差异如何. 若这个差异没有大到有实际意义的程度，则加强了上述结论，即各品种间的差异，即使存在，其实际意义也很有限.

2. 若 $\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_k$ 的差异，从应用观点看，达到了比较重要的程度，则原假设(5.3)之被接受，是由于随机误差的影响太大. 误差方差 σ^2 的一个无偏估计量是 MS_e. 可以考察一下$\sqrt{MS_e}$之值. 若从应用的角度看这个值太大，则看来本试验在精度上欠理想——这不止是(5.3)的检验问题，还有下文要谈到的区间估计问题. 这时，如条件允许，应考虑增大试验规模，以及改进试验以图尽量缩小随机误差的影响.

如果检验的结果为显著，则等于说有充分理由相信各理论平均值 $a_1,\cdots,a_k$ 并不全相同. 但这并不是说它们中一定没有相同的. 如 $k=3$ 时，可能 a_1 与 a_2 之间差别不显著，而它们与 a_3 之间的差别显著. 就指定的一对 a_u,a_v 之间的比较，可通过求 a_u-a_v 的区间估计. 方法如下：按(5.2)及 e_{ij}服从正态分布的假定，不难知道

$$\overline{Y}_u-\overline{Y}_v\sim N\left(a_u-a_v,\left(\frac{1}{n_u}+\frac{1}{n_v}\right)\sigma^2\right)$$

于是

$$\sqrt{\frac{n_u n_v}{n_u + n_v}}[(\overline{Y}_u - \overline{Y}_v) - (a_u - a_v)]/\sigma \sim N(0,1)$$

记 $\hat{\sigma}^2 = MS_e$，$\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计. 以 $\hat{\sigma}$代替上式中的σ，可以证明

$$\sqrt{\frac{n_u n_v}{n_u + n_v}}[(\overline{Y}_u - \overline{Y}_v) - (a_u - a_v)]/\hat{\sigma} \sim t_{n-k} \quad (5.11)$$

由此出发，就得出 $a_u - a_v$ 的置信系数 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$(\overline{Y}_u - \overline{Y}_v) - \sqrt{\frac{n_u + n_v}{n_u n_v}}\hat{\sigma} t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant a_u - a_v$$

$$\leqslant (\overline{Y}_u - \overline{Y}_v) + \sqrt{\frac{n_u + n_v}{n_u n_v}}\hat{\sigma} t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.12)$$

取 $\alpha = 0.05$，算出本例中各 $a_u - a_v$ 的区间估计为

$$a_1 - a_2:\ 28.65 \pm 16.96$$

$$a_3 - a_1:\ 12.08 \pm 23.65$$

$$a_3 - a_2:\ 40.73 \pm 22.62$$

第一和第三个区间不含 0 且全在 0 的右边，这显示 a_3 和 a_1 都在给定的水平 $\alpha = 0.05$ 上显著地大于 a_2. 第二个区间包含 0. 故虽然从点估计上看 a_3 大于 a_1，但在 0.05 的水平上达不到显著性. 所以，单从统计分析的角度看，如果要在品种 1，2，3 中挑一个最好的，则除品种 2 外，品种 1、3 都可考虑. 因为毕竟 a_3 的点估计大于 a_1 的点估计，若无其他的特殊理由，我们就宁肯挑品种 3.

读者想必已注意到：区间估计(5.12)与第四章中所讲的两样本 t 区间估计基本上一致，不同之处在于：这里误差方差 σ^2 的估计 $\hat{\sigma}^2$ 用到了全部样本，而不只是 $Y_{u1}, \cdots, Y_{un_u}$ 及 $Y_{v1}, \cdots, Y_{vn_v}$. 如果品种数很多，则涉及的相互比较非常之多. 例如，若有 5 个品种，则总共将涉及 $\binom{5}{2} = 10$ 组比较，即有 10 个区间估计要做. 这不仅很不方便，而且理论上也有问题. 问题在于：虽则对一对固定的 u，v，置信区间(5.12)成立的概率为 $1-\alpha$，但多个区间(每个区间的

概率为 $1-\alpha$)同时成立的概率就会小于 $1-\alpha$. 区间数愈多,差距愈大. 例如,取 5 个品种,有 10 组 a_u-a_v 要作区间估计,若每个区间估计的置信系数为 0.95,则这 10 个区间估计同时都包含所要估计的参数的概率,将降至 0.6 左右. 为了克服这一困难,统计学中引进了一种叫做"多重比较法"的方法,它考虑到了上面指出的那个问题. 这个内容已超出本书范围之外,不能在此介绍了.

6.5.3 两因素完全试验的方差分析

一般情况下,在一个试验中要考虑好几个对指标可能有影响的因素. 例如在一项工业试验中,影响产品质量指标 Y 的因素可能有反应温度、反应压力、反应时间和某种催化剂的添加量. 若反应温度有 k_1 个不同的可能选择,其他三个因素分别有 k_2, k_3 和 k_4 种不同的选择,则可供选择的试验组合一共有 $k_1\times k_2\times k_3\times k_4$ 种,而这个试验也就称为一个 $k_1\times k_2\times k_3\times k_4$ 试验. 如果每一可能的组合都做一次试验,则试验称为是"完全"的. 若只对一部分组合做试验,则称为"部分实施". 在实际应用中部分实施很常见,因为完全试验往往规模太大,为条件所不允许,且有时并无必要. 要作部分实施,就有一个如何去选择那些实际进行试验的组合的问题. 这里面有很多数学和统计问题,它们构成"试验设计"这门学科的主要内容之一. 本节的第 6.5.5 小节与这个内容有关.

这种试验,不论是完全试验或部分实施,都有一个随机化的问题(或分区组的问题),见 6.5.4 小节. 如在上述工业试验中,若全部试验要由几个人和几台设备去做,则因人的技术和操作水平有差异,设备性能优劣有差异,需要用在前面描述过的随机化方法,把要做的试验随机地分配给这几个人和几台设备.

为书写简便计,这里我们讨论两因素完全试验的情况. 设有两因素 A, B, 分别有 k, l 个水平(例如 A 为品种,有 k 个; B 为播种量,考虑 l 种不同的数值,如 20 斤/亩, 25 斤/亩, ……). A 的水平 i 与 B 的水平 j 的组合记为 (i,j), 其试验结果记为 Y_{ij}, $i=1,\cdots,k$, $j=1,\cdots,l$. 统计模型定为

$$Y_{ij}=\mu+a_i+b_j+e_{ij}, i=1,\cdots,k, j=1,\cdots,l \tag{5.13}$$

为解释这模型,首先把右边分成两部分:e_{ij}为随机误差,它包含了未加控制的因素(A,B 以外的因素)及大量随机因素的影响.假定

$$E(e_{ij})=0, 0<\mathrm{Var}(e_{ij})=\sigma^2<\infty, \text{全体 } e_{ij} \text{独立} \tag{5.14}$$

另一部分 $\mu+a_i+b_j$,它显示水平组合(i,j)的平均效应.它又分解为三部分:μ 是总平均(一切水平组合效应的平均),是一个基准.a_i 表示由 A 的水平 i 带来的增加部分.a_i 愈大,表示因素 A 的水平 i 愈好(设指标愈大愈好),故 a_i 称为因素 A 的水平 i 的效应.b_j 有类似的解释.调整 μ 之值,我们可以补充要求:

$$a_1+\cdots+a_k=0, b_1+\cdots+b_l=0 \tag{5.15}$$

事实上,如(5.15)不成立,则分别以 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 记各a_i 的平均值和各b_j 的平均值,把 μ 换为$\mu+\bar{a}+\bar{b}$,a_i 换为$a_i-\bar{a}$,b_j 换成$b_j-\bar{b}$,则(5.13)式不变,而(5.15)成立.

约束条件(5.15)给了 a_i,b_j 的意义一种更清晰的解释:$a_i>0$ 表示 A 的水平 i(的效应)在 A 的全部水平的平均效应之上,$a_i<0$ 则相反.另外,这个约束条件也给了 μ,a_i 和 b_j 的一个适当的估计法:把 Y_{ij}对一切 i,j 相加.注意到(5.15),有

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}Y_{ij}=kl\mu+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}e_{ij}$$

因上式右边第二项有均值 0,即知

$$Y_{..}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}Y_{ij}/kl \tag{5.16}$$

是 μ 的一个无偏估计.其次,有

$$\sum_{j=1}^{l}Y_{ij}=l\mu+la+\sum_{j=1}^{l}e_{ij}$$

于是,记

$$Y_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{l}Y_{ij}/l, Y_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{k}Y_{ij}/k \tag{5.17}$$

知 $Y_{i\cdot}$为 $\mu+a_i$ 的一个无偏估计.于是得到 a_i 的一个无偏估计为

$$\hat{a}_i=Y_{i\cdot}-Y_{..}, i=1,\cdots,k \tag{5.18}$$

同法得到 b_j 的一个无偏估计为

$$\hat{b}_j = Y_{\cdot j} - Y_{\cdot\cdot}, j = 1, \cdots, l \tag{5.19}$$

它们适合约束条件：$\hat{a}_1 + \cdots + \hat{a}_k = 0, \hat{b}_1 + \cdots + \hat{b}_l = 0$.

下面要进行方差分析，即要设法把总平方和

$$SS = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (Y_{ij} - Y_{\cdot\cdot})^2$$

分解为三个部分：SS_A，SS_B 和 SS_e，分别表示因素 A，B 和随机误差的影响. 这种分解的主要目的是检验假设：

$$H_{0A}: a_1 = \cdots = a_k = 0 \tag{5.20}$$

和

$$H_{0B}: b_1 = \cdots = b_l = 0 \tag{5.21}$$

H_{0A}成立表示因素A 对指标其实无影响. 在实际问题中，绝对无影响的场合少见，但如影响甚小以致被随机误差所掩盖时，这种影响事实上等于没有. 因此，拿 SS_A 和 SS_e 的比作为检验统计量正符合这一想法.

所要作的分解可如下得到：把 $Y_{ij} - Y_{\cdot\cdot}$ 写为

$$\begin{aligned} Y_{ij} - Y_{\cdot\cdot} &= (Y_{i\cdot} - Y_{\cdot\cdot}) + (Y_{\cdot j} - Y_{\cdot\cdot}) \\ &\quad + (Y_{ij} - Y_{i\cdot} - Y_{\cdot j} + Y_{\cdot\cdot}) \end{aligned} \tag{5.22}$$

两边平方，对 i, j 求和. 注意到

$$\sum_{i=1}^{k} (Y_{i\cdot} - Y_{\cdot\cdot}) = 0, \sum_{j=1}^{l} (Y_{\cdot j} - Y_{\cdot\cdot}) = 0$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} (Y_{ij} - Y_{i\cdot} - Y_{\cdot j} + Y_{\cdot\cdot}) \\ = &\sum_{j=1}^{l} (Y_j - Y_{i\cdot} - Y_{\cdot j} + Y_{\cdot\cdot}) = 0 \end{aligned}$$

即知所有交叉积之和皆为 0，而得到

$$\begin{aligned} SS = &\, l \sum_{i=1}^{k} (Y_{i\cdot} - Y_{\cdot\cdot})^2 + k \sum_{j=1}^{l} (Y_{\cdot j} - Y_{\cdot\cdot})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (Y_{ij} - Y_{i\cdot} - Y_{\cdot j} + Y_{\cdot\cdot})^2 \end{aligned}$$

$$= SS_A + SS_B + SS_e \tag{5.23}$$

第一个平方和可以作为因素 A 的影响的衡量,从前述 $Y_{i\cdot} - Y_{\cdot\cdot}$ 作为 a_i 的估计可以理解.第二个平方和同样解释.至于第三个平方和可作为随机误差的影响这一点,直接看不甚明显.可以从两个角度去理解:在 SS 中去掉 SS_A 和 SS_B 后,剩余下的再没有其他系统性因素的影响,故只能作为 SS_e.另外,由模型(5.13)及约束条件(5.15),易知

$$Y_{ij} - Y_{i\cdot} - Y_{\cdot j} + Y_{\cdot\cdot} = e_{ij} - e_{i\cdot} - e_{\cdot j} + e_{\cdot\cdot} \tag{5.24}$$

这里面已毫无 μ, a_i, b_j 的影响,而只含随机误差.

读者可能不很满足于上面的推导,即怎么想到把 $Y_{ij} - Y_{\cdot\cdot}$ 拆成(5.22)式而得出(5.23)? 对此,我们的回答是:

1. 并非在任何模型中总平方和 SS 都有适当的分解,这要看设计如何.比方说,如在全部 kl 个组合中少做了 1 个(即有一个 Y_{ij} 未观察),则分解式作不出来.

2. 在能进行分解时,方差分析提供了进行分解的一般方法.使用这个一般方法也能得到(5.23).但是,由于在本模型下通过(5.22)更易实现,我们就不用这一般方法.

得到分解式(5.23)后,我们就可以像单因素情况那样,写出下面的方差分析表:

SS_A, SS_B 自由度分别为其水平数减去 1,这一点与单因素情况相同.总和自由度为全部观察值数目 kl 减去 1.剩下的就是误差平方和自由度:

$$(kl - 1) - (k - 1) - (l - 1) = (k - 1)(l - 1)$$

MS 就是 SS 除以其自由度.显著性的意义也与单因素的情况相同.如果 A 那一行的显著性位置标上了一个星号,即表示在水平 0.05 之下原假设 H_{0A} 被否定.双星则相当于水平 0.01,称为高度显著.如以前曾指出过的,0.05 和 0.01 这两个数字只是一种习惯,不一定拘泥.

表 6.2　两因素完全试验的方差分析表

项　目	SS	自由度	MS	F 比	显著性
A	SS_A	$k-1$	MS_A	MS_A/MS_e	加“＊”,
B	SS_B	$l-1$	MS_B	MS_B/MS_e	“＊＊”或不加
误　差	SS_e	$(k-1)(l-1)$	MS_e	—	—
总　和	SS	$kl-1$	—	—	—

例 5.2　在一个农业试验中,考虑 4 种不同的种子品种($k=4$)和 3 种不同的施肥方法($l=3$).试验数据为(单位:斤/亩):

品种 \ 施肥方法	1	2	3
1	292	316	325
2	310	318	317
3	320	318	310
4	370	365	330

算出

$$Y_{..}=324.25, Y_{1.}=311, Y_{2.}=315, Y_{3.}=316, Y_{4.}=355$$

$$Y_{.1}=323,\quad Y_{.2}=329.25,\quad Y_{.3}=320.50$$

$$SS=(292-324.25)^2+\cdots+(330-324.25)^2=5444.75$$

$$SS_A=3[(311-324.25)^2+\cdots+(355-324.25)^2]$$
$$=3824.25$$

$$SS_B=4[(323-324.25)^2+\cdots+(320.50-324.25)^2]$$
$$=162.50$$

$$SS_e=5444.75-3834.25-162.50=1458$$

列出方差分析表如下:

项　目	SS	自由度	MS	F 比	显著性
A(品种)	3824.25	3	1274.75	5.246	*
B(施肥法)	162.50	2	81.25	0.344	
误　差	1458.00	6	243.00	—	
总　和	5444.75	11	—	—	

只有品种因素达到了显著性，而"施肥方法"这个因素未达到显著性. 在 $a=0.05$ 的水平上，没有充分证据证明：不同的施肥法对产量有显著的影响.

任一因素两个不同水平的效应差的区间估计，与(5.12)相似. 此处更简单一些：如估计的是 a_u-a_v，则 $n_u=n_v=l$；如估计的是 b_u-b_v，则 $n_u=n_v=k$. $\hat{\sigma}$ 仍是 $(MS_e)^{1/2}$. 当 k 或 l 较大时，涉及的比较为数甚多，因而也存在单因素情况下曾指出的那种问题.

应用上的一个重要问题，是选择一个水平组合 (i,j)，使其平均产量 $\mu+a_i+b_j$ 达到最大. 选择的方法如下：如在本例，因素 A 的效应显著，则选 i，使 a_i 在 $a_1,\cdots,a_k$ 中达到最大. 从统计上说，若 a_i 和 a_r 的差异不显著(即 a_i-a_r 的区间估计包含 0)，则选 a_r 也可以. 但若无特别理由，总是选使 $a_1,\cdots,a_k$ 达到最大的那个 i. 因素 B 的效应不显著. 故从统计上说，选择其任一水平 j 都可以. 但一般如无特殊原因，总是选 j，使 b_j 在 $b_1,\cdots,b_l$ 中达到最大. 拿本例来说，应选取 $i=4,j=2$. 注意在 Y_{41},Y_{42},Y_{43} 中，最大的并非 Y_{42} 而是 Y_{41}.

还有一点要注意：在采纳模型(5.13)时，我们事实上引进了一种假定，即两因素 A,B 对指标的效应是可以叠加的. 换一种方式说：因素 A 的各水平的优劣比较，与因素 B 处在哪个水平无关，反之亦然. 更一般的情况是：A,B 两因子有"交互作用". 这时在模型(5.13)中，还要加上表示交互作用的项 c_{ij}. 这时不仅统计分析复杂化了，尤其是分析结果的解释也复杂化了. 本书不涉及这种情况. 在一个特定的问题中，交互作用是否需要考虑，在很大程度上取决于问题的实际背景和经验. 有时，通过试验数据的分析也可以看出一些问题. 例如，若误差方差 σ^2 的估计 MS_e 反常地大，则有可能是由于交互作用所致. 因为可以证明：若交互作用确实存在而未加考虑，则它的影响进入随机误差而增大了 MS_e.

6.5.4 单因素随机区组试验的方差分析

在本节(6.5.1)段中，我们讲述了费歇尔的试验设计三原则中

的两个,即重复和随机化.第三个原则是“分区组”,就是我们现在要介绍的.

为解释“区组”这个概念,看一个简单例子.设有一个包含3个品种的试验,每个品种重复5次.于是一共要准备15小块形状大小一样的田地.这些地可能散布在一个很大的范围内,因而各小块的条件会存在较大的差别,以致使试验误差加大.固然我们可以通过完全随机化的方法保证不发生人为的系统性偏差,但这并不能克服由于这15小块的内在不均匀性而带来的误差.

因此我们考虑如下的设计,选择5个村子,每个村准备3小块地,条件尽可能均匀,但不同村的地块在条件上可以有较大的差别.由于3这个数字较小,准备3小块相当均匀的地块,比之准备15小块均匀地块,就更容易做到.

然后我们让每个品种在每个村子里的3小块中各占一块,哪个品种占哪一块由随机化决定.这样,我们就有一种不完全的随机化:每个村子中的3块地必须种3个品种,这一条不能变(如用完全随机化,有可能某个品种在某个村子里占2或3块),但在同一村子里则用随机化.

同一村子里的3小块地,就构成一个区组.区组的大小,在本例中即小块地的数目,为3.它正好等于品种这个因素的水平数.

上述设计就叫做“随机区组设计”.“随机”的含义是在每个区组内实行随机化.这设计的优点,从本例中看得很清楚:由于每个品种在5个村子里各占有一块,即使各村子之间有较大差异,也不会使任一品种有利或不利,因此可以缩小误差.

一般地,区组就是一组其条件尽可能均匀的试验单元.区组大小,即所含试验单元个数,等于所考察的因素的水平数*,因而在每一区组内,各水平都可以实现一次且仅一次.在区组内实行随机化.区组的数目则没有限制,可多可少.

---

* 满足这条件的区组称为“完全区组”.也可以考虑这样的设计,其区组大小,即所含试验单元数,比因素水平数少.这种区组称为“不完全区组”,其设计问题很复杂.

区组的例子很多.例如,要比较一种产品的4种不同的配方,每配方重复5次,一共作20次.如果由5个人操作,则考虑到各人操作水平不同而带来的误差,可让每一个人对这4个配方都操作一次,抵消人的影响.这时,可以迳直把每个人看作一个区组(严格地说,是每人所做的那4个配方构成一区组);为要比较一种病的几种治疗方法,要对一些患者作临床试验.病情不同,病人年龄、身体条件等的不同,会带来误差.因此要把病人分组:条件尽可能相似的病人分在一组,病人个数即治疗方法个数,在每一组内,每个治疗方法施加于一个病人(用随机化)时,每一组病人就构成一个区组,等等.

随机区组试验的统计分析,与上段讲的两因素试验完全一样,只消把其中的一个因素看作是区组就行.例如因素 A 有 k 个水平,每水平做 l 次试验,分 l 个区组(每区组大小为 k).以 Y_{ij} 记因素 A 的水平 i 在第 j 个区组内的试验值(例如,第 i 个种子品种在第 j 个村子里那小块上的亩产量),则有模型(5.13),其中 μ, a_i, e_j 的意义同前,而 b_j 则称为(第 j 个区组的)"区组效应",意思是第 j 个区组优于和劣于全部区组的平均的量.拿上述品种试验来说,若某个村子田地条件特别好,则该村子(区组)的 b_j 值就高.这样,表6.2的方差分析表,及其计算过程,完全适用于此处.所不同的是现在因素 B 解释为区组,而 SS_B 则是"区组平方和".

由于我们所关心的只有一个因素 A,故在方差分析表6.2中,我们首先感兴趣的是因素 A 的效应是否达到显著.但区组效应是否达到显著也有一定的意义:它表明区组的划分是否成功(即是否真达到了如下的要求:区组内各试验单元很均匀,而不同区组内的试验单元则有较大差异).如区组效应达到显著,则表明区组划分至少有一定的效果,否则就难说,甚或可能有反效果.这个问题我们略多说几句.若在(5.13)中去掉标志区组的那一项 b_j,即当成一个完全随机化的模型去分析,则 SS 和 SS_A 仍不变,而 SS_e 则将成为(5.23)式中的 SS_B 与 SS_e 之和.由此看出:如果 $MS_B <$ MS_e(指表6.2中的 MS_e),则在完全随机化模型之下误差方差的

估计,反而比在随机区组设计之下为低,再加上自由度的损失(完全随机化设计之下,误差方差估计的自由度为 $k(l-1)$,而在随机区组设计之下只有 $(k-1)(l-1)$),就使 A 和 F 比要达到显著性更难,即:如果因素 A 确有效应,则当区组划分不当时,会降低发现这种效应的机会.

由此可见,不是在任何场合下划分区组都好.若没有足够理由显示不同区组间确有显著差异,则宁肯不分.如以前提过的那个比较 4 种配方,由 5 个人操作的例子.不同的人在操作技术上总多少会有差异,但如没有根据认为他们之间有颇大差异,则分区组不一定有利.在实际工作中,这种界限不易掌握,这里只能作为一条一般性的原则谈一下.

例 5.3 重新考察例 5.2,把"施肥方法"这个因子理解为区组.即例(5.2.4)中的数据,看作为 4 个品种在 3 个村子里种植的结果.据该例分析,品种 A 的效应在 $\alpha=0.05$ 的水平上达到显著(但在 $\alpha=0.01$ 的水平上则否),区组效应达不到显著.更有甚者,区组的 $MS(81.25)$ 还小于误差的 $MS(243.00)$,说明在本例中分区组没有带来什么好处.

现如果把(5.24)当作为一个完全随机化试验的结果,则

$$SS = 5444.75, SS_A = 3824.25 \text{(与以前相同)}$$

$$SS_e = 162.50 + 1458 = 1620.50$$

SS_e 的自由度为 $4(3-1)=8$,而 $MS_e=1620.50/8=202.56$. A 的 F 比为 $MS_A/MS_e=6.29$,也超过了 $F_{3,8}(0.05)=4.07$,即也得出 A 的效应为显著的结论.

6.5.5 多因素正交表设计及方差分析

例如,若一个试验中涉及 4 个因素 A,B,C,D,分别有 k,l,p 和 q 个水平,在效应叠加(无交互作用)的假定下,模型为

$$Y_{ijuv} = \mu + a_i + b_j + c_u + d_v + e_{ijuv} \tag{5.25}$$

其意义与(5.13)相似.如做全面试验,即对

$$1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant l, 1 \leqslant u \leqslant p, 1 \leqslant v \leqslant q \quad (5.26)$$

范围内的(i,j,u,v)都观察了 Y_{ijuv},则方差分析与模型(5.13)相似.但是,这个作法需要做 $klpq$ 次试验,这往往太多了.如果因素数目更多,则所需试验次数大得不现实.

因此,在实用中一般只做部分实施,即对(5.26)范围内的部分(i,j,u,v)做试验.问题在于:这一部分不能随心所欲地取,其取法必须保持某种平衡性,以达到以下两个目的:

1. 模型(5.25)中的有关参数 μ, a_i, b_j, c_u, d_v 等仍能得到适当的估计.

2. 总平方和 SS 仍能进行分解,以列出像表 6.2 那样的方差分析表.

这个问题如何解决,其细节已远超出本课程的范围.在这里,我们只介绍一种叫做"正交表"的工具,它简便易用,在实用中广为流传.

看下面这张表

表 6.3　$L_8(4\times 2^4)$正交表

行号 \ 列号	1 A	2 B	3 C	4 D	5	试验结果
1	1	1	1	1	1	134
2	1	2	2	2	2	220
3	2	1	1	2	2	188
4	2	2	2	1	1	242
5	3	1	2	1	2	268
6	3	2	1	2	1	290
7	4	1	2	2	1	338
8	4	2	1	1	2	320

这个表一共有 8 行、5 列.这两个数字(8,5)有其意义:8 表示如用这个表安排试验,则必须做 8 次试验,不能多也不能少.5 表示最多能安排 5 个因素,不能多,可以少.

L 是正交表记号.L_8 表示表有 8 行.4×2^4 表示:表中有 1 列

(即第 1 列)含有数字 1,2,3,4,有 4 列含数字 1,2. 其所以称为正交表,是因为这表满足以下两个条件:

1. 每列中含不同数字的个数一样. 例如,第 1 列含不同数字 1,2,3,4,每种 2 个,第 2—5 列都是含不同数字 1,2,每种 4 个.

2. 任一列中同一数字那些位置,在其他列中被该列所有不同数字占据,且个数相同. 例如,第 3 列中数字 1 占据 1,3,6,8 行的位置,而在第 1 列中,这 4 个位置恰被该列不同数字 1,2,3,4 各占据 1 次. 在第 5 列中,这 4 个位置则被该列不同数字 1,2 各占据 2 次.

凡是满足这两个条件的表就叫做正交表. 至于如何去构造出这种表,那涉及许多深刻的数学问题. 实用上,把已造出的有实用价值的正交表汇集起来附于种种统计学著作中,实用者按需要取用即可.

下面来谈谈怎样利用正交表 $L_8(4\times 2^4)$ 安排试验. 这所讲的当然也适用于一般的正交表. 归纳起来有以下几条:

1. 因素的水平只能是 4 或 2,为 4 的至多只能有一个,为 2 的至多 4 个.

2. 若试验要分区组(例如在两台设备上做),则区组大小只能为 2 或 4.

3. 为确定计,设试验中涉及 4 种配方(因素 A,水平 4),2 种温度(因素 B,水平 2),2 种压力(因素 C,水平 2),并分两个区组. 则配方这因子 A 必须标在第 1 列的头上,B、C 和区组都是 2 水平,可在 2—5 列中任选 3 列标上,还有一个空白列. 设选定表 6.3 的 1—4 列(D 表区组),则设计的意义如下:每一行读 A,B、C 所在的三列. 例如,第一行为(1,1,1). 这表示第 1 号试验是:A,B,C 都处在 1 水平. 第二行为(1,2,2),表示第 2 号试验为:A 处在 1 水平,B,C 都处在 2 水平. 第七行为(4,1,2),表示 A 处在 4 水平,B 在 1 水平,C 在 2 水平,等等. 区组划分则看 D 这一列. 同一数字属于一个区组. 在这里,D 列的数字 1 在第 1,4,5,8 行,故第 1,4,5,8 号试验划在一个区组内,剩下的第 2,3,6,7 号试验划在一个

区组内.

这样一个设计必能达到表 6.3 前面提出的两条要求.第 1 条很容易证明,第 2 条不能在此细证了.考虑(5.25),其中 $k=4, l=p=q=2$.对 a_i, b_j, c_u, d_v 等也加上约束条件(类似(5.15)):

$$\sum_1^4 a_i = 0, \sum_1^2 b_j = 0, \sum_1^2 c_u = 0, \sum_1^2 d_v = 0 \qquad (5.27)$$

按(5.25)写出上述 8 号试验的方程:

$$\begin{aligned}
Y_{1111} &= \mu + a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_{1111} \\
Y_{1222} &= \mu + a_1 + b_2 + c_2 + d_2 + e_{1222} \\
Y_{2112} &= \mu + a_2 + b_1 + c_1 + d_2 + e_{2112} \\
Y_{2221} &= \mu + a_2 + b_2 + c_2 + d_1 + e_{2221} \\
Y_{3121} &= \mu + a_3 + b_1 + c_2 + d_1 + e_{3121} \\
Y_{3212} &= \mu + a_3 + b_2 + c_1 + d_2 + e_{3212} \\
Y_{4122} &= \mu + a_4 + b_1 + c_2 + d_2 + e_{4122} \\
Y_{4211} &= \mu + a_4 + b_2 + c_1 + d_1 + e_{4211}
\end{aligned}$$

把这 8 个方程相加,各 Y 之和记为 $\sum Y$,各 e 之和记为 $\sum e$,则由(5.27)易见

$$\sum Y = 8\mu + \sum e$$

由此可知 $\overline{Y} = \sum Y/8$ 为 μ 的一个无偏估计.

把第 1 列为 1 处的那些 Y 相加,得(仍用(5.27))

$$Y_{1111} + Y_{1222} = 2\mu + 2a_1 + e_{1111} + e_{1222}$$

由此知,$(Y_{1111} + Y_{1222})/2 - \overline{Y}$ 为 a_1 的无偏估计.顺此以往,对任何 a_i, b_j, c_u, d_v 都可求得其无偏估计.例如,要求 c_2 的无偏估计,只须把 c 所在那列数字 2 对应的试验值相加,用(5.27),得

$$\begin{aligned}
&Y_{1222} + Y_{2221} + Y_{3121} + Y_{4122} \\
&\quad = 4\mu + 4c_2 + e_{1222} + e_{2221} + e_{3121} + e_{4122}
\end{aligned}$$

于是得到$(Y_{1222} + Y_{2221} + Y_{3121} + Y_{4122})/4 - \overline{Y}$ 是 c_2 的一个无偏估计.

总之,在任何一个正交表中,某因素水平 i 的效应(例如本例

的 a_i)的估计,等于该因素水平 i 的所有观察值的算术平均,减去全部观察值的算术平均.

接着就是计算各因素的平方和,例如 SS_A.如 A 有k 个水平,其各水平的效应 a_i 的估计记为 $\hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_k$(其计算已如上述),又总试验次数为 n,则

$$SS_A = n(\hat{a}_1^2 + \cdots + \hat{a}_k^2)/k \tag{5.28}$$

误差平方和可以由总平方和 $SS = \sum(Y - \overline{Y})^2$ 减去各因素的平方和求得.其自由度等于 $n-1$ 减去各因素的自由度——每一因素的自由度等于其水平数减去 1.

例 5.4 设表 6.3 中各次试验的结果如该表右边一列所示,我们来作出上述计算.

1. 首先算出全部试验值的算术平均

$$\overline{Y} = (134 + 220 + \cdots + 320)/8 = 250$$

及总平方和

$$SS = (134-250)^2 + (220-250)^2 + \cdots + (320-250)^2 = 32832$$

2. 估计各因素 A,B,C 各水平的效应及区组(D)效应

$$\hat{a}_1 = (134+220)/2 - 250 = -73, \hat{a}_2 = -35$$

$$\hat{a}_3 = 29, \hat{a}_4 = 79$$

这四者之和应为 0,这可以作为计算是否有错的一个验证.又

$$\hat{b}_1 = -18, \hat{b}_2 = 18; \hat{c}_1 = -17, \hat{c}_2 = 17; \hat{d}_1 = -9, \hat{d}_2 = 9$$

3. 按公式(5.28)算出各效应及区组平方和

$$SS_A = 8(73^2 + 35^2 + 29^2 + 79^2)/4 = 27272$$

$$SS_B = 8(18^2 + 18^2)/2 = 2592, SS_C = 2312, SS_D = 648$$

其自由度分别为 3,1,1,1.误差平方和为

$$SS_e = 32832 - 27272 - 2592 - 2312 - 648 = 8$$

其自由度为$(8-1)-3-1-1-1=1$.于是

$$MS_A = SS_A/3 = 9090.67, MS_B = SS_B, \cdots, MS_e = SS_e$$

列出方差分析表：

项　目	SS	自由度	MS	F 比	显著性
A(配方)	27272	3	9090.7	1136.33	* *
B(温度)	2592	1	2592	324	*
C(压力)	2312	1	2312	289	*
D(区组)	648	1	648	81	
误　差	8	1	8	—	
总　和	32832	7	—	—	

查 F 分布表，得

$$F_{3,1}(0.05) = 216, F_{1,1}(0.05) = 161$$

$$F_{3,1}(0.01) = 540, F_{1,1}(0.01) = 405$$

故配方这个因素的效应达到高度显著，温度和压力这两个因素则达到显著，区组效应未达到显著.

某些正交表(不是所有的)也可以考虑因素间的交互作用. 这时，表头的安排就不能像无交互作用时那么自由，而要受到某种规则的限制，具体规则由一个与该正交表配套的“交互作用表”给出. 这些都已超出本书范围，不能在此多讲了.