A.(2.22)式的证明

注意到两个行向量(n 维)

$$b'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$b'_2=\left(\frac{X_1-\overline{X}}{S_x},\frac{X_2-\overline{X}}{S_x},\cdots,\frac{X_n-\overline{X}}{S_x}\right)$$

都是单位长(注意(2.16)式)且正交,可以补充 $n-2$ 个行向量 b'_3,$\cdots$,b'_n,使方阵

$$B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

为正交方阵.作变换

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

则因为 $Y_1, Y_1, \cdots, Y_n$ 独立,各有方差为 σ^2 的正态分布,按第二章的附录 A 中的引理的证法,易证得 $Z_1, \cdots, Z_n$,也独立,并各有方差为 σ^2 的正态分布.

现证明:

$$E(Z_i) = 0, i \geqslant 3 \tag{1}$$

为此,记 $b_i{}' = (b_{i1}, \cdots, b_{in})$,则

$$E(Z_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} E(Y_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\beta_0 + \beta_1(X_i - \overline{X}))$$

$$= \beta_0 \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + \beta_1 \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(X_i - \overline{X})$$

因为 b_i 与 b_1, b_2 都正交,上式右边两个和都为 0.由此证明了(1)式.

另外注意

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \sqrt{n}\overline{Y}$$

$$Z_2 = \frac{1}{S_x} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) Y_i$$

$$Z_2^2 = \frac{1}{S_x^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) Y_i$$

$$= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) Y_i$$

由于正交变换使平方和不变,有

$$Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$$

$$= n\overline{Y}^2 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) Y_i + \sum_{i=3}^{n} Z_i^2$$

将此式与(2.23)式结合,得

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=3}^{n} Z_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=3}^{n} Z_i^2 / \sigma^2$$

由于 $Z_3/\sigma, Z_4/\sigma, \cdots, Z_n/\sigma$ 是独立同分布的 $N(0,1)$ 变量,有$(Z_3^2 + \cdots + Z_n^2)/\sigma^2 \sim \chi_{n-2}^2$. 于是证明了(2.22).

B.(2.16)式的证明

由于 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 独立,知 Z_2 与 $\sum_{i=3}^{n} Z_i^2$ 独立. 又 Z_2 为有方差 σ^2 的正态分布而 $\sum_{i=3}^{n} Z_i^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-2}^2$,故按 t 分布的定义有

$$\frac{Z_2 - E(Z_2)}{\sigma} \Bigg/ \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=3}^{n} Z_i^2} \sim t_{n-2} \qquad (2)$$

但 $\sum_{i=3}^{n} Z_i^2/(n-2) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2/(n-2) = \hat{\sigma}^2$,而因 $E\hat{\beta}_1 = \beta_1$,有

$$Z_2 - E(Z_2) = \hat{\beta}_1 S_x - E(\hat{\beta}_1 S_x) = (\hat{\beta}_1 - \beta_1) S_x$$

故

$$\frac{Z_2 - E(Z_2)}{\sigma} \Bigg/ \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=3}^{n} Z_i^2} = (\hat{\beta}_1 - \beta_1)/(\hat{\sigma} S_x^{-1})$$

此式与(2)式结合,即证明了(2.26).